Howard Eves





estudio de las Geometrías

ESTUDIO DE LAS GEOMETRIAS

HOWARD EVES
Profesor de Matemáticas
Universidad de Maine

Tomo I

TRADUCCIÓN AL ESPAÑOL POR
SUSANA BLUMOVICZ DE SIPERSTEIN
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

TRADUCCIÓN REVISADA POR EL
ING. SANTIAGO ALONSO
Ex Profesor de la Escuela de Ingenieros
de Bilbao, España



UTEHA

INDICE

VI. GEOMETRIA PROYECTIVA

6.1. PERSPECTIVIDADES Y PROYECTIVIDADES. 6.2. CONICAS PROPIAS. 6.3. LA DEFINICION DE CHASLES-STEINER DE UNA CONICA PROPIA. 6.4. RECIPROCIDAD Y EL PRINCIPIO DE DUALIDAD. • 6.5. LA PROPIEDAD RESPECTO AL FOCO Y A LA DIRECTRIZ. 6.6. PROYECCION ORTOGONAL.

CONSIDERESE, POR UN MOMENTO, el problema con el que un artista se enfrenta cuando intenta pintar un cuadro real de algún objeto. Cuando el artista mira el objeto, los rayos de luz que parten de éste entran en su ojo. Si se pusiera una pantalla transparente entre el ojo del artista y el objeto, estos rayos de luz cortarían a la pantalla en una colección de puntos. Esta colección, que puede llamarse *imagen,* o *proyección,* del objeto sobre la pantalla, es la que el artista debe pintar en su papel o lienzo para que un observador de la pintura reciba la misma impresión de la forma del objeto que recibiría cuando mirara directamente a éste. Como el papel o el lienzo del artista no es una pantalla transparente, la tarea de dibujar con exactitud la proyección deseada presenta un problema real al artista. En un esfuerzo para producir cuadros más reales, muchos de los artistas y arquitectos del Renacimiento se interesaron profundamente en descubrir las leyes formales que rigen la construcción de las proyecciones del objeto sobre una pantalla, y, en el siglo quince, varios de ellos crearon los elementos de una teoría fundamental de la perspectiva geométrica.

La teoría de la perspectiva se extendió considerablemente a principios del siglo diecisiete por un pequeño grupo de matemáticos franceses, cuyo animador fue Gérard Desargues, un ingeniero y arquitecto que nació en Lyons en 1593 y murió en la misma ciudad alrededor de 1662. Influido por las necesidades crecientes de los artistas y arquitectos de crear una

teoría más profunda de la perspectiva, Desargues publicó en París en 1639, un notable tratado original sobre las secciones cónicas en que aprovechó la idea de la proyección. Pero este trabajo fue tan despreciado por la mayoría de los demás matemáticos de aquella época, que pronto se olvidó y todas las copias de la publicación desaparecieron. Dos siglos más tarde, cuando el geómetra francés Michel Chasles (1793-1880) escribió una historia de la geometría, no tuvo modo de estimar el valor del trabajo de Desargues. Sin embargo, seis años después, en 1845, Chasles tuvo la suerte de encontrar una copia manuscrita del tratado de Desargues, hecho por uno de sus seguidores, y desde aquella época el trabajo fue reconocido como uno de los clásicos en el desarrollo primitivo de la geometría proyectiva.

Hay varias razones para el desprecio inicial del pequeño volumen de Desargues. Fue eclipsada por la más elástica geometría analítica introducida por Descartes dos años antes. Los geómetras generalmente o bien desarrollaban esta nueva herramienta poderosa o trataban de aplicar los infinitesimales a la geometría. Además, desafortunadamente, Desargues adoptó un estilo y una terminología que eran tan excéntricas que opacaron su trabajo y desanimaron a otros de intentar adecuadamente la evaluación de sus realizaciones.

La reintroducción de las consideraciones proyectivas a la geometría no ocurrió sino hasta finales del siglo dieciocho, cuando el gran geómetra francés Gaspard Monge (1746-1818) creó su geometría descriptiva. Esta ciencia, que contiene una forma de representar y analizar objetos tridimensionales por medio de sus proyecciones sobre ciertos planos, tuvo su origen en el proyecto de fortificaciones. Monge fue un maestro muy inspirado, y se reunía con él un grupo de brillantes estudiantes de geometría, entre los cuales se encontraban L. N. Carnot (1753-1823), Charles J. Brianchon (1785-1864) y Jean Victor Poncelet (1788-1867).

El resurgimiento real de la geometría proyectiva fue impulsado por Poncelet. Como prisionero de guerra ruso, cogido durante la retirada de Napoleón de Moscú, y sin libros a la mano, Poncelet planeó su gran obra sobre geometría proyectiva, que, después de su libertad y vuelta a Francia, publicó en París en 1822.* Esta obra dio un ímpetu tremendo al estudio del tema e inició el llamado "gran período" de la historia de la geometría proyectiva. Luego entraron en el campo multitud de matemáticos, entre los cuales se encontraron Gergonne, Brianchon, Chasles, Plücker, Steiner, Staudt, Reye y Cremona, grandes nombres de la historia de la geometría y, en particular, de la historia de la geometría proyectiva.

El trabajo de Desargues y de Poncelet, y de sus seguidores, condujo a los geómetras a clasificar las propiedades geométricas en dos categorías:

* *Traité des propriétés projectives des figures.*

las *propiedades métricas,* en las que intervienen las medidas de las distancias y de los ángulos, y las *propiedades descriptivas,* en las que sólo se trata la relación de las posiciones de los elementos geométricos entre sí. El teorema de Pitágoras, de que *el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de sus dos catetos,* es una propiedad métrica. Como ejemplo de una propiedad descriptiva, o de posición, podemos mencionar el notable teorema del "hexagrama místico" de Blaise Pascal (o simplemente, hexágono de Pascal), que hemos ya considerado para el caso de una circunferencia y que se inspiró en el trabajo de Desargues: *Si un hexágono se inscribe en una cónica, entonces los puntos de intersección de los tres pares de lados opuestos son colineales, y, recíprocamente, si los puntos de intersección de los tres pares de lados opuestos de un hexágono son colineales, entonces el hexágono está inscrito en una cónica.*

La distinción entre los dos tipos de propiedades geométricas, al menos en el caso de figuras planas, se aclaran más cuando se considera el hecho de que las propiedades descriptivas no se alteran cuando se somete la figura a una proyección, en tanto que las métricas pueden no verificarse ya cuando se proyecta la figura. Así, al proyectar de un plano a otro, un triángulo rectángulo no sigue siendo necesariamente rectángulo, de modo que la relación pitagórica no se verifica siempre en la figura proyectada; el teorema de Pitágoras es, pues, un teorema métrico. Por el contrario, en el caso del teorema de Pascal, un hexágono inscrito en una cónica se proyecta en un hexágono inscrito en una cónica y los puntos colineales se proyectan en puntos colineales y, en consecuencia, el teorema se conserva; el teorema de Pascal es un teorema descriptivo.

Muchas propiedades descriptivas se presentan en la forma aparente de propiedades métricas. Por ejemplo, hemos visto (en el teorema 2.4.7) que la relación anarmónica (AB,CD) de cuatro puntos A, B, C, D de una recta no se altera cuando ésta se proyecta en otra y los cuatro puntos A', B', C', D'. En otras palabras, aunque las longitudes de los diversos segmentos correspondientes de las dos rectas no son necesariamente iguales unos a otros, sin embargo, las dos razones compuestas

$$(\overline{A'C'}/\overline{C'B'})/(\overline{A'D'}/\overline{D'B'}) \quad \text{y} \quad (\overline{AC}/\overline{CB})/(\overline{AD}/\overline{DB}),$$

esto es, las dos relaciones anarmónicas (AB,CD) y $(A'B',C'D')$ tienen el mismo valor y, por tanto, la relación anarmónica de los cuatro puntos colineales es una propiedad descriptiva de ellos.

El estudio de las propiedades descriptivas de las figuras geométricas se conoce como *geometría proyectiva.*

La geometría proyectiva ha creado una vasta rama de la geometría singular y elegantemente desarrollada, y se ha convertido en básica para muchos estudios geométricos. Algunos de sus aspectos más elementales se examinarán en este capítulo; otros más profundos aparecerán en capítulos siguientes. Una definición más nítida del tema se dará a continuación.

6.1 Perspectividades y proyectividades. Sean π y π' (fig. 6.1a) dos planos fijos, dados, no ideales, del espacio *ilimitado,* y sea V un punto fijo dado que no esté ni en π ni en π'. Como el espacio es ilimitado, π y π' son también planos ilimitados, y el punto V puede ser uno ordinario o bien uno ideal (o del infinito). Sea P un punto cualquiera, ordinario o ideal, del plano π. Entonces, la recta VP cortará al plano π' en un punto único, ordinario o ideal, P' de π'. En esta forma el plano ilimitado π se mapea (o proyecta) sobre el plano ilimitado π'. En efecto, como los distintos pun-

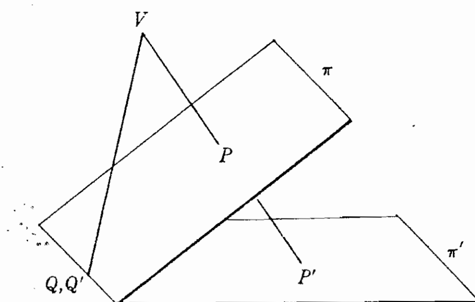


FIG. 6.1a

tos de π tienen distintas imágenes en π', el mapeo (o proyección) es realmente una transformación del conjunto de todos los puntos del plano ilimitado π sobre el conjunto de todos los puntos del plano ilimitado π'. Los puntos que están en la recta de intersección de los planos, π y π', son puntos invariantes de la transformación.

6.1.1 DEFINICIONES. Una transformación como la que se acaba de describir se llama *perspectividad,* o una *transformación perspectiva,* y el punto V se llama *centro* de la perspectividad. Si V es un punto ordinario del espacio, la perspectividad se llama *perspectividad central;* si V es un punto ideal del espacio, la perspectividad se llama *perspectividad paralela.* La recta de intersección de π y π' se llama *eje de perspectividad.* La recta de π (o de π') que se mapea o proyecta en la recta del infinito de π' (o de π) se llama *recta límite o de fuga* de π (o de π'). El punto en que una recta de π (o de π') corta a la recta de fuga de π (o de π') se llama *punto límite o de fuga* de la recta.

Una perspectividad que sea un producto de dos o más perspectividades se llama *proyectividad*, o una *transformación proyectiva*. Por ejemplo, una perspectividad de centro V del plano π sobre el plano π', seguida de una perspectividad de centro W del plano π' sobre el π'', es una proyectividad del plano π sobre el π''.

Es claro que los dos planos π y π' de una perspectividad deben considerarse como planos *ilimitados*, porque, en caso contrario, la correspondencia entre los puntos de dos planos podría no ser biunívoca. Por este motivo, un plano ilimitado se llama a menudo *plano proyectivo*.

Se ve fácilmente que una proyectividad transforma una recta en una recta. La siguiente situación especial es muy útil.

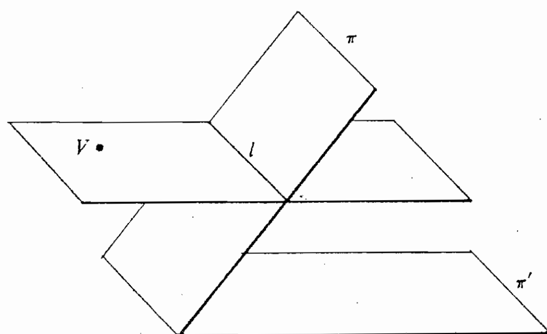


Fig. 6.1b

6.1.2 Teorema. *Si π es un plano dado,* l *una recta dada de π,* V *un punto dado que no esté en π, entonces existe un plano π' tal que la perspectividad de centro* V *transforma la recta* l *de π en la recta del infinito de π'.*

Elíjase para π' (fig. 6.1b) un plano paralelo al plano determinado por V y l (pero no coincidente con él). Entonces es claro que la recta que une V con un punto P de l será paralela al plano π', esto es, cortará a π' en el infinito.

6.1.3 Definición. La operación de seleccionar un centro de perspectividad, V, y un plano, π', adecuados, de modo que una recta dada l de un plano dado π se mapee o proyecte en la recta del infinito de π' se llama *proyectar la recta dada al infinito*.

La operación de proyectar una recta dada al infinito puede a menudo simplificar mucho la demostración de un teorema. Damos algunos ejemplos; el lector deberá observar la aplicación del procedimiento *transformar-resolver-invertir*. Estableceremos primero una de las propiedades armónicas de un cuadrivértice completo.

6.1.4 TEOREMA. *Sea* PQRS (fig. 6.1c₁) *un cuadrivértice completo y supongamos que* PQ *y* SR *se cortan en* A, PR *y* SQ *en* B, PS *y* QR *en* C, AB *y* PS *en* D. *Entonces,* (PS,DC) = −1.

Proyéctese la recta AC al infinito. Entonces, $P'Q'R'S'$ (fig. 6.1c₂) es un paralelogramo y D' es el punto medio de $P'S'$. Como C' está en el infinito, tenemos $(P'S',D'C') = -1$. De donde se deduce el teorema.

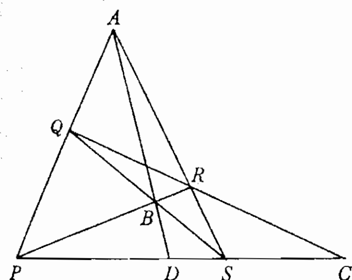


FIG. 6.1c₁

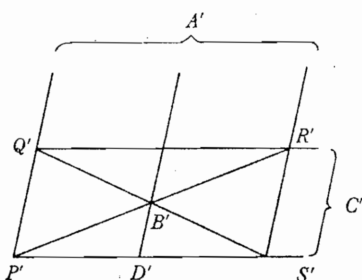


FIG. 6.1c₂

6.1.5 TEOREMA. *Si las tres rectas* UP_1P_2, UQ_1Q_2, UR_1R_2 (fig. 6.1d₁) *cortan a las dos rectas* OX_1 *y* OX_2 *en* P_1, Q_1, R_1 *y* P_2, Q_2, R_2, *respectivamente, entonces, los puntos de intersección de* Q_1R_2 *y* Q_2R_1, R_1P_2 *y* R_2P_1, P_1Q_2 *y* P_2Q_1 *son colineales en una recta que pasa por el punto* O.

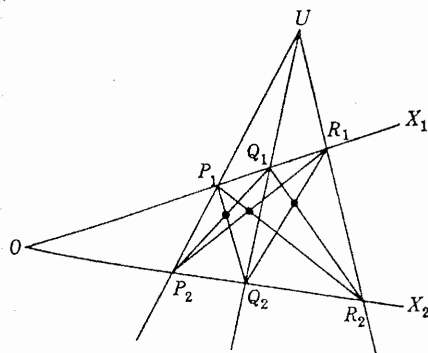


FIG. 6.1d₁

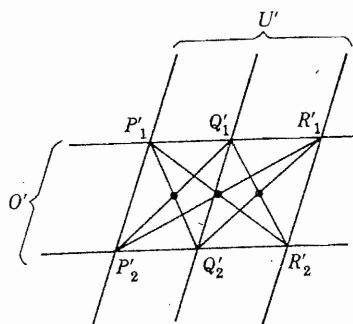


FIG. 6.1d₂

Proyéctese la línea OU al infinito. La figura proyectada aparece en la 6.1d₂, donde $P'_1P'_2$, $Q'_1Q'_2$, $R'_1R'_2$ son todas paralelas y $P'_1Q'_1R'_1$ y $P'_2Q'_2R'_2$ son paralelas. Es claro que los puntos de intersección de $Q'_1R'_2$ y $Q'_2R'_1$, $R'_1P'_2$ y $R'_2P'_1$, $P'_1Q'_2$ y $P'_2Q'_1$ son colineales en una recta paralela a las $P'_1Q'_1R'_1$ y $P'_2Q'_2R'_2$ (están en una recta que se halla a la mitad de la distancia entre las $P'_1Q'_1R'_1$ y $P'_2Q'_2R'_2$). Se deduce que los

puntos correspondientes de la figura original son colineales en una recta que pasa por el punto O.

6.1.6 TEOREMA DE LOS DOS TRIÁNGULOS DE DESARGUES. *Los triángulos copolares de un plano son coaxiales, y viceversa.*

Sean los dos triángulos (fig. 6.1e) $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$, y supongamos que B_1C_1 y B_2C_2 se cortan en L, C_1A_1 y C_2A_2 en M, y A_1B_1 y A_2B_2 en N.

Supongamos que A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 son concurrentes en un punto O. Proyéctese la recta MN al infinito. Entonces, $A'_1B'_1$ y $A'_2B'_2$ son paralelas, y $A'_1C'_1$ y $A'_2C'_2$ también lo son. Se deduce que $O'B'_1/O'B'_2 = O'A'_1/O'A'_2 = O'C'_1/O'C'_2$, de donde $B'_1C'_1$ y $B'_2C'_2$ son también paralelas. Esto es, las intersecciones de los lados correspondientes de los triángulos $A'_1B'_1C'_1$ y $A'_2B'_2C'_2$ son colineales (en la recta del infinito). Se desprende que las intersecciones de los lados correspondientes de los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ son colineales. Esto es, los triángulos copolares de un plano son coaxiales.

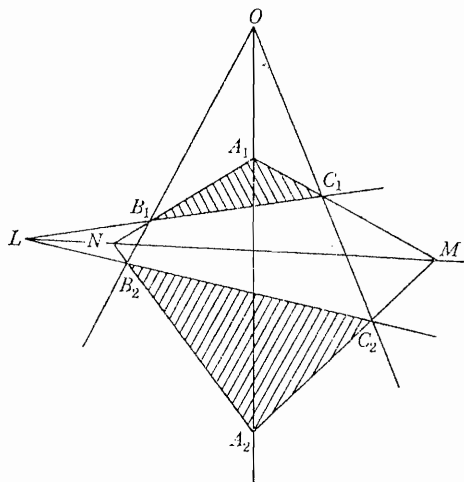


FIG. 6.1e

Supongamos ahora que L, M, N son colineales. Proyéctese la recta LMN al infinito. Entonces, los dos triángulos $A'_1B'_1C'_1$ y $A'_2B'_2C'_2$ tienen sus lados correspondientes paralelos y, en consecuencia, son homotéticos entre sí, en tanto que $A'_1A'_2$, $B'_1B'_2$, $C'_1C'_2$ son concurrentes en un punto O'. Se deduce que A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 son concurrentes en un punto O. Esto es, los triángulos coaxiales de un plano son copolares.

6.1.7 TEOREMA. *Hay una perspectividad que transporta un triángulo dado* ABC *y un punto dado* G *de su plano (pero no en un lado del triángulo) a un triángulo* A'B'C' *y su centroide* G'.

Sean AG, BG, CG (fig. 6.1f) tales que corten a los lados opuestos BC, CA, AB en los puntos D, E, F. Entonces, los triángulos DEF y ABC son copolares y, en consecuencia, también coaxiales. Esto es, los puntos L, M, N de intersección de EF y BC, FD y CA, DE y AB son colineales. Por el teorema 6.1.4, $(BC,DL) = -1$. Proyéctese la recta LMN al infinito. Entonces, D' es el punto medio de $B'C'$. Análogamente, E' y F' son los puntos

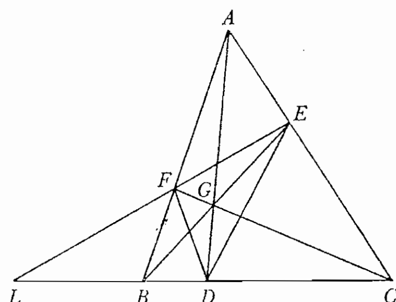


FIG. 6.1f

medios de $C'A'$ y $A'B'$, respectivamente. Se desprende que G' es el centroide del triángulo $A'B'C'$.

Si AD, BE, y CF son rectas cevianas concurrentes de un triángulo ABC, el teorema de Ceva establece que

$$\frac{(\overline{BD})(\overline{CE})(\overline{AF})}{(\overline{DC})(\overline{EA})(\overline{FB})} = +1.$$

El primer miembro de esta ecuación es la razón de un producto de ciertos segmentos al producto de otros segmentos, y esta razón de productos de segmentos tiene las dos siguientes propiedades interesantes:

1) Si sustituimos $\overline{BD}$ por $B \times D$, y tratamos análogamente todos los demás segmentos que aparecen, y luego consideramos la expresión resultante como una algebraica de las letras B, D, etc., estas letras pueden todas cancelarse o suprimirse entre sí.

2) Si sustituimos $\overline{BD}$ por una letra, digamos a, que representa la recta en la que se halla el segmento y, análogamente, tratamos todos los demás segmentos que aparecen, y luego consideramos la expresión resultante como una algebraica de las letras a, etc., éstas pueden cancelarse.

6.1.8 DEFINICIÓN. Una razón de un producto de segmentos a otro producto de ellos, donde todos los segmentos están en un plano, se llama una *expresión*-h si tiene las propiedades 1) y 2) descritas antes.

6.1.9 Teorema. *El valor de una expresión-*h *es invariante ante cualquier proyectividad.*

Es suficiente demostrar que una expresión-h dada tiene un valor que es invariante ante una perspectividad arbitraria. Sea V el centro de una perspectividad y sea $\overline{AB}$ uno cualquiera de los segmentos que aparecen en la expresión-h. Designemos por p la distancia de V a AB. Entonces,

$$p\overline{AB} = (VA)(VB) \operatorname{sen} \overline{AVB},$$

porque cada miembro es doble del área del $\triangle \overline{VAB}$. Se deduce que

$$\overline{AB} = [(VA)(VB) \operatorname{sen} \overline{AVB}]/p.$$

Sustitúyase cada segmento $\overline{AB}$ de la expresión-h por $[(VA)(VB)$ sen $\overline{AVB}]/p$. Como la propiedad (1) anterior se verifica, VA, VB, etc., se cancelan; como la propiedad (2) anterior se verifica, p, etc. se cancelan. Nos queda una expresión que sólo contiene los senos, sen $\overline{AVB}$, etc. Ahora bien, como $\sphericalangle\overline{AVB} = \sphericalangle\overline{A'VB'}$, etc., la misma relación que se verifica entre los senos sen $\overline{AVB}$, etc., se cumple entre los senos sen $\overline{A'VB'}$, etc. La introducción de los factores VA', VB', p', etc., nos conduce, por inversión de las cancelaciones anteriores, a la misma relación entre los segmentos $\overline{A'B'}$, etc., que se dio entre los segmentos $\overline{AB}$, etc.

El lector observará que el procedimiento empleado en la demostración anterior es esencialmente de la forma en que demostramos, en el artículo 2.4, que la relación anarmónica de cuatro puntos colineales es invariante ante una perspectividad.

6.1.10 Teorema de Ceva. *Si* AD, BE, CF *son rectas cevianas concurrentes de un triángulo* ABC, *entonces,*

$$(1) \qquad \frac{(\overline{\mathrm{BD}})(\overline{\mathrm{CE}})(\overline{\mathrm{AF}})}{(\overline{\mathrm{DC}})(\overline{\mathrm{EA}})(\overline{\mathrm{FB}})} = +1.$$

La expresión del primer miembro de (1) es una expresión-h y, por consiguiente (por el teorema 6.1.9), es de valor invariante ante la proyección. Por el teorema 6.1.7, hay una perspectividad que transforma al triángulo ABC y al punto G de concurrencia de las tres cevianas en un triángulo $A'B'C'$ y su centroide G'. Luego, $\overline{B'D'}/\overline{D'C'} = \overline{C'E'}/\overline{E'A'} = \overline{A'F'}/\overline{F'B'} = 1$ y evidentemente,

$$\frac{(\overline{B'D'})(\overline{C'E'})(\overline{A'F'})}{(\overline{D'C'})(\overline{E'A'})(\overline{F'B'})} = +1.$$

De donde se desprende el teorema.

6.1.11 TEOREMA DE MENELAO. *Si* D, E, F *son puntos de Menelao colineales que están en los lados* BC, CA, AB *de un triángulo* ABC, *entonces,*

$$(1)\qquad \frac{(\overline{\mathrm{BD}})(\overline{\mathrm{CE}})(\overline{\mathrm{AF}})}{(\overline{\mathrm{DC}})(\overline{\mathrm{EA}})(\overline{\mathrm{FB}})} = -1.$$

La expresión del primer miembro de (1) es una expresión-h y, por consiguiente (por el teorema 6.1.9), de valor invariante ante la proyección. Proyéctese la recta DEF al infinito. Entonces $\overline{B'D'}/\overline{D'C'} = \overline{C'E'}/\overline{E'A'} = \overline{A'F'}/\overline{F'B'} = -1$ y, evidentemente,

$$\frac{(\overline{B'D'})(\overline{C'E'})(\overline{A'F'})}{(\overline{D'C'})(\overline{E'A'})(\overline{F'B'})} = -1.$$

De donde se desprende el teorema.

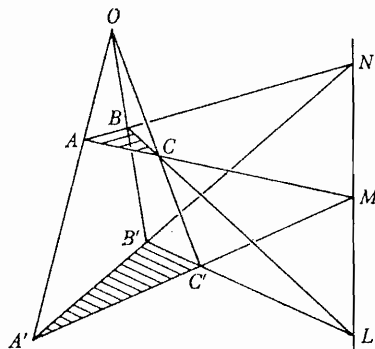


FIG. 6.1g

Concluiremos el artículo dando otra demostración proyectiva del teorema de los dos triángulos de Desargues y una demostración de un teorema debido a Pappus. Este último es una generalización del 6.1.5, y es un caso de un teorema descriptivo que era conocido por los antiguos griegos. En el Capítulo VIII veremos que el teorema de Pappus y el de los dos triángulos de Desargues, son muy importantes en el estudio de los fundamentos de la geometría proyectiva.

6.1.12 TEOREMA DE LOS DOS TRIÁNGULOS DE DESARGUES. *Los triángulos copolares (en el espacio o en el plano) son coaxiales, y viceversa.*

a) Sean los dos triángulos ABC y $A'B'C'$ y supongamos que están en distintos planos π y π', respectivamente (fig. 6.1g). Así mismo, supongamos que AA', BB', CC' concurren en un punto O. Entonces BC y $B'C'$ son coplanares y, por consiguiente, se cortan en un punto L. Análogamente, CA

y $C'A'$ son coplanares y, por tanto, se cortan en un punto M, y AB y $A'B'$ son coplanares y, en consecuencia, se cortan en un punto N. Los puntos L, M, N, están entonces en ambos planos π y π', y, por consiguiente, en la recta de intersección de estos dos planos. Esto es, los triángulos copolares en distintos planos son coaxiales. El recíproco se deduce invirtiendo el argumento anterior.

b) Supongamos ahora que los dos planos, π y π' coinciden, y (fig. 6.1h) que los puntos L, M, N de intersección de BC y $B'C'$, CA y $C'A'$, AB y $A'B'$ son colineales en una recta l de π. Sea π_1 un plano distinto del π y que pase por l, sea P un punto que no esté en π ni en π_1, y supongamos que PA', PB', PC' corten a π_1 en A_1, B_1, C_1, respectivamente. Entonces B_1, C_1, B', C',

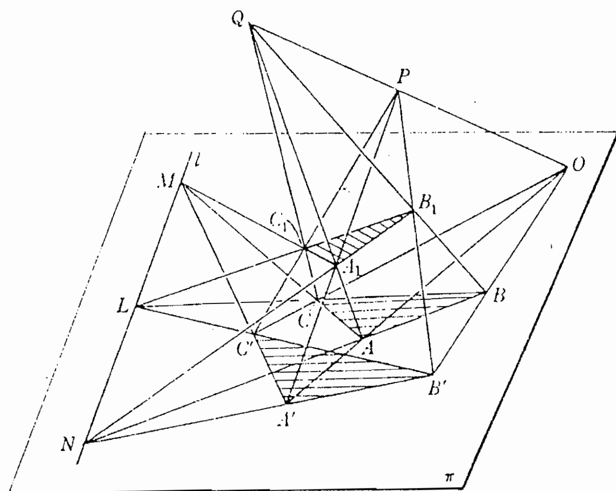


Fig. 6.1h

son coplanares, como también lo son C_1, A_1, C', A' y A_1, B_1, A', B', y vemos que BC, $B'C'$, B_1C_1 se cortan en L; CA, $C'A'$, C_1A_1 en M; AB, $A'B'$, A_1B_1 en N. Por tanto, los dos triángulos $A_1B_1C_1$ y ABC son coaxiales y, por consiguiente, por la parte a), copolares. Esto es, AA_1, BB_1, CC_1 concurren en un punto Q. Supongamos que QP corta a π en un punto O. Entonces, A, A', O están todos en el plano determinado por PA_1A' y QA_1A. Se deduce que AA' pasa por O. Análogamente, BB' y CC' pasan por O, y los triángulos ABC y $A'B'C'$ son copolares. El recíproco se obtiene aplicando lo anterior a los triángulos $AA'M$ y $BB'L$.

6.1.13 Teorema de Pappus. *Si los vértices* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *de un hexágono* 123456 *están alternativamente en un par de rectas, entonces, las tres*

intersecciones P, Q, R *de los lados opuestos* 23 *y* 56, 45 *y* 12, 61 *y* 34 *del hexágono son colineales* (fig. 6.1i_1).

Proyéctese la recta PQ al infinito y supóngase que la intersección O de las rectas 135 y 246 no está en PQ. Entonces $1'$, $3'$, $5'$ son colineales; $2'$, $4'$, $6'$ son colineales; O' es un punto finito; $2'3'$ es paralela a $5'6'$, y $4'5'$ es paralela a $1'2'$. Tenemos que demostrar que $6'1'$ es paralela a $3'4'$. Ahora bien (fig. 6.1i_2), como $2'3'$ es paralela a $5'6'$ y $4'5'$ es paralela a $1'2'$,

$$\overline{O'6'}/\overline{O'2'} = \overline{O'5'}/\overline{O'3'} \text{ y } \overline{O'1'}/\overline{O'5'} = \overline{O'2'}/\overline{O'4'}.$$

Se deduce que $\overline{O'6'}/\overline{O'1'} = \overline{O'4'}/\overline{O'3'}$ y $\overline{6'1'}$ es paralela a $\overline{3'4'}$.

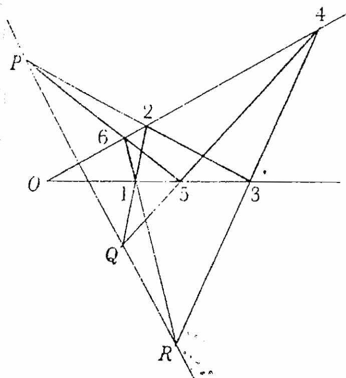


Fig. 6.1i_1

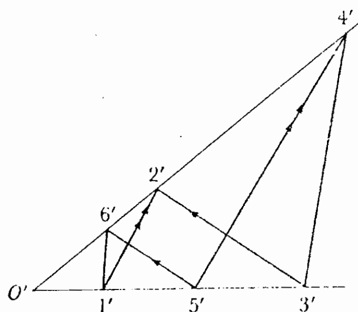


Fig. 6.1i_2

Si O está en PQ, entonces las rectas $1'3'5'$ y $2'4'6'$ son paralelas. Pero entonces, $\overline{1'5'} = \overline{2'4'}$ y $\overline{5'3'} = \overline{6'2'}$. Se deduce que $\overline{1'3'} = \overline{6'4'}$ y que $6'1'$ es paralela a $3'4'$.

PROBLEMAS

6.1–1 a) Demuéstrese que una proyectividad transforma una recta a otra recta.

b) Demuéstrese que ante una perspectividad una recta y su imagen se cortan en el eje de perspectividad.

6.1–2 a) Demuéstrese que ante una perspectividad, el ángulo formado por las imágenes, m' y n', de dos rectas m y n cualesquiera es igual al ángulo que los puntos de fuga de m y n subtienden en el centro V de perspectividad, o sea, al ángulo con que son vistos desde éste.

b) Demuéstrese que ante una perspectividad, todos los ángulos cuyos lados tienen los mismos puntos de fuga se mapean o proyectan en ángulos iguales.

6.1–3 a) Se da un plano π que contenga una recta l y dos ángulos ABC y DEF, estando A, C, D, F sobre l en el orden A, D, C, F. Demuéstrese que existe una perspectividad que proyecta l al infinito y los ángulos ABC y DEF en ángulos de magnitudes dadas α y β, respectivamente.

b) ¿Deben los segmentos AC y DF de la parte a) dividirse entre sí?

6.1–4 Demuéstrese que existe una perspectividad que proyecta un cuadrilátero dado, $ABCD$, en un cuadrado.

6.1–5 Demuéstrese que la razón anarmónica de un haz de cuatro rectas coplanares distintas se conserva en la proyección.

6.1–6 Demuéstrese que en una perspectividad que transporta un plano π a otro no paralelo π' hay en cada plano exactamente dos puntos tales que todo ángulo en uno u otro de ellos se proyecta en otro ángulo igual. (Estos puntos se llaman *isocentros* de la perspectividad.)

6.1–7 Demuéstrese que en una perspectividad que transforma un plano π en otro no paralelo π' hay en cada plano, además del eje de perspectividad, una recta cuyos segmentos se proyectan en segmentos iguales. (Estas rectas se llaman *isolíneas* de la perspectividad.)

6.1–8 Las rectas VAA', VBB', VCC' cortan a otras dos, OX y OY, en A y A', B y B', C y C', respectivamente. AB' y $A'C$ se cortan en P; $A'B$ y AC' se cortan en Q. Demuéstrese que la recta PQ pasa por V.

6.1–9 Philippe de la Hire (1640-1718), alumno de Desargues, inventó el siguiente mapeo, o transformación, interesante de un plano sobre sí mismo. Sean a y b dos rectas paralelas dadas y O un punto en su plano. Sea P un punto arbitrario del plano y por P trácese una recta que corte a en A y a b en B. Entonces, la imagen P' de P se considera que es la intersección con PO de la paralela a AO que pasa por B.

a) Demuéstrese que P' es independiente de la recta particular PAB que pasa por P utilizada para determinarlo.

b) ¿En qué se mapea o transforma la recta a?

c) ¿En qué se mapea la recta b?

d) ¿En qué se mapea una recta paralela a las a y b?

e) ¿En qué se mapea una recta que pase por O paralela a las rectas a y b?

f) ¿En qué se mapea la recta en el infinito?

g) Demuéstrese que todas las rectas se mapean en rectas.

h) ¿Dónde debemos tomar la imagen de O?

i) Generalícese el mapeo de Hire a la situación en que las rectas a y b no necesiten ser paralelas.

6.1–10 Si los lados de un hexágono 123456 pasan alternativamente por dos puntos fijos P y Q, demuéstrese que las tres diagonales que unen los pares opuestos de vértices del hexágono son concurrentes.

6.1–11 Si P, Q, R son tres puntos de los lados BC, CA, AB, respectivamente, de un triángulo ABC, demuéstrese que $(\overline{BP}/\overline{PC})(\overline{CQ}/\overline{QA})(\overline{AR}/\overline{RB})$ es de valor invariante ante la proyección.

6.1–12 En el cuadrivértice completo $ABCD$, una transversal corta a los lados AB y CD en M y M', a los lados BC y AD en N y N', y a los lados AC y BD en P y P'. Demuéstrese que

$$(\overline{MN})(\overline{MN'})/(\overline{MP})(\overline{MP'}) = (\overline{M'N})(\overline{M'N'})/(\overline{M'P})(\overline{M'P'}).$$

6.2 Cónicas propias. Comenzaremos por establecer informalmente varias definiciones que muy probablemente ya son familiares al lector.

Un *cono circular* (fig. 6.2a) es una superficie generada por una recta que se mueve de modo que siempre corte a una circunferencia dada, c, y

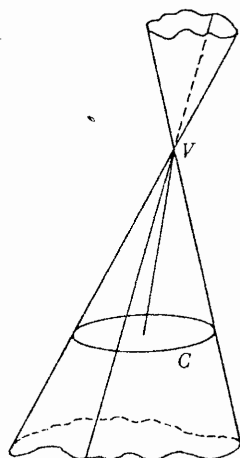


Fig. 6.2a

pase por un punto fijo, V, que no está en el plano de la circunferencia. En cada una de sus posiciones, la recta engendradora se llama *generatriz* del cono; el punto fijo se llama *vértice* del mismo. El vértice divide cada generatriz en dos semirrectas y al cono en dos hojas, cada una de las cuales se genera por una de las semirrectas. Si la recta que une el vértice con el centro de la circunferencia dada es perpendicular al plano de ésta, el cono se llama *cono circular recto;* en caso contrario, se llama *cono circular oblicuo.*

Las curvas llamadas parábolas, elipses e hipérbolas reciben su nombre debido a Apolonio, quien las investigó como ciertas secciones planas de conos circulares rectos y oblicuos. Como estas curvas son intersecciones

de conos circulares por planos, son ejemplos de *secciones cónicas,* o simplemente, *cónicas.* Si el plano que corta el cono no pasa por su vértice, la sección es una cónica *propia.* Una *parábola* es una cónica propia cuyo plano de sección es paralelo a una y sólo a una generatriz del cono; una *elipse* (incluyendo una circunferencia como caso especial) es una cónica propia cuyo plano de sección corta todas las generatrices de una hoja del cono; una *hipérbola* es una cónica propia cuyo plano de sección se corta en ambas hojas del mismo. La figura 6.2b ilustra un cono circular recto seccionado para que dé una parábola, *p,* una elipse, *e* y una hipérbola, *h.*

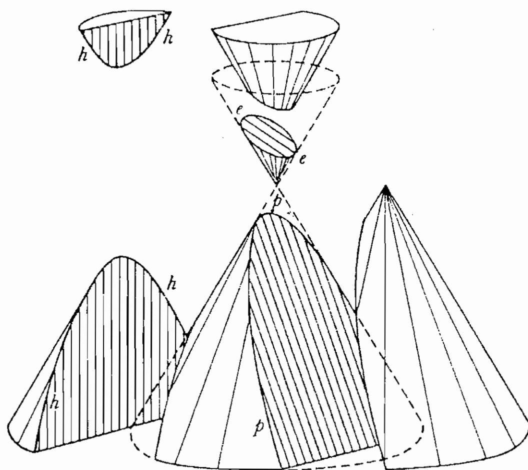


Fig. 6.2b

En el espacio ordinario, una parábola es evidentemente una curva no cerrada de un solo trazo; una elipse es una curva cerrada de un solo trazo; una hipérbola es una curva no cerrada de dos trazos. En el espacio ilimitado, cada curva es de un trazo y cerrada.

Como una cónica propia es una sección de un cono circular, cuyo plano de sección no pasa por el vértice, se deduce que una cónica propia es la imagen de una circunferencia ante una perspectividad. Por consiguiente, cualquier propiedad de una circunferencia que es descriptiva, esto es, que no se altera por la proyección, puede transferirse inmediatamente a la cónica. En esta forma obtenemos la siguiente sucesión de teoremas respecto a las cónicas.

6.2.1 Teorema. *Una recta que esté en el plano de una cónica propia cortará a ésta en dos puntos, será tangente a ella o no la cortará.*

6.2.2 TEOREMA. *Sólo hay una recta tangente a una cónica propia en cada punto de ésta.*

6.2.3 TEOREMA. *Una cónica propia divide a su plano, aparte de la propia cónica, en dos regiones tales que desde un punto de una de las regiones se puedan trazar dos rectas tangentes a la cónica, y desde un punto de la otra región no se pueda trazar ninguna recta tangente a la cónica.*

6.2.4 DEFINICIONES. Las dos regiones mencionadas en el teorema 6.2.3 se llaman, respectivamente, el *exterior* y el *interior* de la cónica propia.

6.2.5 TEOREMA. *Si una recta variable que pasa por un punto dado,* P, *del plano de una cónica propia,* c, *corta a ésta, los conjugados armónicos del punto con respecto a las intersecciones de la recta con la cónica están todos en una recta* p. (Véase el corolario 3.6.8.)

6.2.6 DEFINICIONES. La recta p del teorema 6.2.5 se llama *polar* del punto P respecto a la cónica c, y el punto P se llama *polo* de la recta p respecto a la cónica c.

6.2.7 TEOREMA. 1) *La polar de un punto respecto a una cónica propia corta a ésta, es tangente a ella en dicho punto, o no la corta, según que el punto esté en el exterior de la cónica, sobre ella o en su interior.* 2) *Si un punto P es exterior a una cónica propia, entonces su polar respecto a ella pasa por los puntos de contacto de las tangentes a la cónica desde el punto* P. (Véase el teorema 3.6.2.)

6.2.8 TEOREMA. 1) *Si, respecto a una cónica propia dada, la polar de* P *pasa por* Q, *entonces la polar de* Q *pasa por* P. 2) *Si, respecto a una cónica propia dada, el polo de la recta* p *está en la recta* q, *entonces el polo de* q *está en* p. 3) *Si, respecto a una cónica propia dada,* P *y* Q *son los polos de* p *y* q, *entonces el polo de la recta* PQ *es el punto de intersección de* p *y* q. (Véase el teorema 3.6.3.)

6.2.9 DEFINICIONES. Dos puntos tales que cada uno esté en la polar del otro, respecto a una cónica propia dada, se llaman *puntos conjugados* respecto a la cónica; dos rectas tales que cada una pase por el polo de la otra, respecto a una cónica propia dada, se llaman *rectas conjugadas* respecto a la cónica.

6.2.10 TEOREMA. *Respecto a una cónica propia dada:* 1) *Todo punto de una recta tiene su conjugado en ella.* 2) *Toda recta que pase por un punto tiene una conjugada que pasa por el punto.* 3) *De dos puntos conjugados distintos sobre una recta que corte a la cónica, uno está en el interior y el otro en el exterior de la cónica.* 4) *De dos rectas conjugadas*

distintas que se corten en el exterior de la cónica, una cortará a la cónica y la otra no la cortará. 5) *Un punto de la cónica es conjugado de todos los puntos de la tangente a ella en el punto.* 6) *Una tangente a la cónica es conjugada de todas las rectas que pasen por su punto de contacto con la cónica.* (Véase el teorema 3.6.6.)

6.2.11 TEOREMA. *Si, respecto a una cónica propia dada, dos puntos conjugados están en una recta que corta a la cónica, estarán separados armónicamente por los puntos de intersección.* (Véase el teorema 3.6.7.)

6.2.12 TEOREMA. *Si, respecto a una cónica propia dada, dos rectas conjugadas se cortan exteriormente a la cónica, estarán separadas armónicamente por las tangentes a la cónica desde su punto de intersección.* (Véase el teorema 3.6.9.)

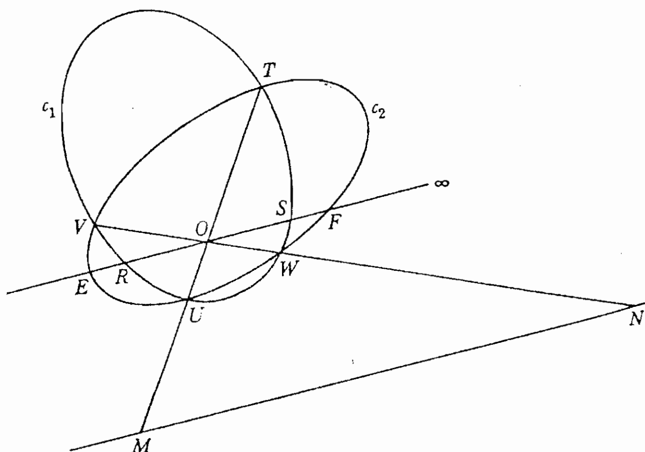


FIG. 6.2c

6.2.13 TEOREMA. *Si* A, B, C, D *son cuatro puntos colineales distintos, y* a, b, c, d *son sus polares respecto a una cónica propia dada, entonces* (AB,CD) = (ab, cd). (Véase el teorema 3.6.10.)

6.2.14 TEOREMA. *Si* ABCD *es un cuadrivértice completo inscrito en una cónica propia, entonces todo punto diagonal del cuadrivértice es el polo, respecto a la cónica, de la recta determinada por los otros dos puntos diagonales.* (Véase el teorema 3.6.12.)

6.2.15 EL TEOREMA GENERALIZADO DE LA MARIPOSA. *Sea* O (fig. 6.2c) *el punto medio de una cuerda dada,* RS, *de una cónica propia* c_1; *tracemos otras cuerdas,* TU *y* VW, *por* O, *y supongamos que una cónica* c_2 *que pase*

por U, V, T, W *corte a la cuerda dada en* E *y* F. *Entonces,* O *es el punto medio de* EF.

Supongamos que MN, la polar de O respecto a la cónica c_1, corte a TU en M y a VW en N. Entonces, como $(VW,ON) = (TU,OM) = -1$, MN también es la polar de O respecto a la cónica c_2. Además, RS es paralela a MN puesto que $(RS,O\infty) = -1$. Por consiguiente, $(EF,O\infty) = -1$ y O es el punto medio de EF. (Véase el teorema 3.6.13.)

6.2.16 Teorema de Pascal. *Si un hexágono (no necesariamente convexo) se inscribe en una cónica propia, los tres puntos de intersección de los pares de lados opuestos del hexágono son colineales.* (Véase el teorema 3.6.10.)

6.2.17 Teorema de Brianchon. *Si un hexágono (no necesariamente convexo) está circunscrito a una cónica propia, las tres rectas que unen los pares de vértices opuestos del hexágono son concurrentes.* (Véase el teorema 3.6.11.)

6.2.18 Teorema de Chasles. *Sean* A, B, C, D *cuatro puntos distintos de una cónica propia y supongamos que las tangentes a la cónica en*

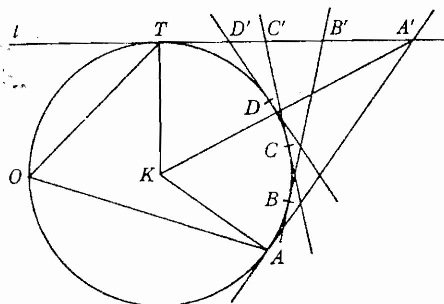


Fig. 6.2d

A, B, C, D *corten a una tangente fija,* t, *a la cónica en los puntos* A′, B′, C′, D′, *respectivamente. Entonces, si* O *es un punto de la cónica,* O(AB,CD) = (A′B′,C′D′).

Como el teorema es proyectivo, basta establecerlo para el caso en que la cónica propia sea una circunferencia. Sea K el centro de la circunferencia (fig. 6.2d) y T el punto de contacto de la tangente t. Entonces $\sphericalangle A'KT = \frac{1}{2}\sphericalangle AKT = \sphericalangle AOT$. Se deduce que los haces $O(ABCD)$ y $K(A'B'C'D')$ son congruentes y $O(AB,CD) = K(A'B',C'D') = (A'B',C'D')$.

6.2.19 Teorema de Carnot. *Si* (fig. 6.2e) *los lados* BC, CA, AB *de un triángulo* ABC *cortan a una cónica propia en los puntos* A_1 *y* A_2,

B_1 y B_2, C_1 y C_2, *respectivamente, entonces*

$$(1) \qquad (\overline{AC}_1)(\overline{AC}_2)(\overline{BA}_1)(\overline{BA}_2)(\overline{CB}_1)(\overline{CB}_2) = (\overline{AB}_1)(\overline{AB}_2)(\overline{BC}_1)(\overline{BC}_2)(\overline{CA}_1)(\overline{CA}_2).$$

Supondremos que ninguno de los puntos de intersección sea ideal ni vértice del triángulo. Entonces el primer miembro de (1) dividido por el segundo de (1) es una expresión-h y, por tanto (por el teorema 6.1.9), es de valor invariante ante la proyección. Por la definición de una cónica pro-

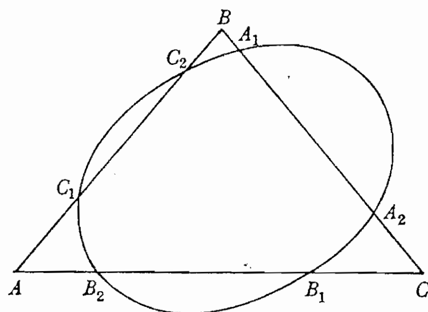


Fig. 6.2e

pia, hay una perspectividad que transforma la cónica en una circunferencia. Ahora bien, la relación (1) se verifica para una circunferencia, porque $(\overline{A'C'}_1)(\overline{A'C'}_2) = (\overline{A'B'}_1)(\overline{A'B'}_2)$, etc. En consecuencia, la expresión-h tiene el valor $+1$, y se deduce el teorema.

PROBLEMAS

6.2–1 Si PQ es una cuerda de una cónica propia, U un punto de la recta PQ, y V el punto en que la polar de U respecto a la cónica corta a la recta PQ, demuéstrese que $1/\overline{PV} + 1/\overline{QV} =$ constante.

6.2–2 TP y TQ son tangentes a una cónica propia en P y Q, y la bisectriz del ángulo PTQ corta a la cuerda PQ en U. RUR' es una cuerda que pasa por U. Demuéstrese que TU es bisectriz del ángulo RTR'.

6.2–3 Sean A, B, C tres puntos de una cónica propia, CT la tangente a la cónica en C, y CD tal que $C(TD,AB) = -1$. Demuéstrese que CD pasa por el polo de AB.

6.2–4 TP y TQ son tangentes a una cónica propia en P y Q. La tangente en el punto R de la cónica corta a TP, TQ, PQ en L, M, N, respectivamente. Demuéstrese que $(LM,RN) = -1$.

6.2–5 Se traza una cuerda PQ por el punto medio U de una cuerda AB de una cónica propia. Si las tangentes en P y Q cortan a AB en L y M, demuéstrese que U es el punto medio de LM.

6.2–6 TP y TQ son tangentes a una cónica propia en P y Q. Una tangente a la cónica paralela a PQ corta a TP y TQ en M y N, respectivamente, y es tangente a la cónica en R. Demuéstrese que R es el punto medio de MN.

6.2–7 A, B, C, D son cuatro puntos de una cónica propia; AB y CD se cortan en R; AC y BD se cortan en S; las tangentes a la cónica en A y D se cortan en T. Demuéstrese que R, S, T son colineales.

6.2–8 a) Demuéstrese que una parábola es tangente a la recta del infinito.

b) Demuéstrese que no hay dos tangentes a una parábola que sean paralelas.

c) TP y TQ son tangentes a la parábola en P y Q; TV biseca a PQ en V y corta a la parábola en R. Demuéstrese que R es el punto medio de TV.

d) Demuéstrese que la recta que está a la mitad de la distancia entre un punto y su polar, respecto a una parábola, es tangente a la parábola.

e) Demuéstrese que las rectas que unen los puntos medios de los lados de un triángulo, que es autoconjugado respecto a una parábola, son tangentes a la parábola.

6.2–9 Definimos que el *centro* de una cónica propia es el polo, respecto a la cónica, de la recta del infinito. Demuéstrese lo siguiente:

a) El centro de una parábola está en el infinito.

b) El centro de una hipérbola es un punto ordinario que está en el exterior de la curva.

c) El centro de una elipse es un punto ordinario que está en el interior de la curva.

Las hipérbolas y las elipses se llaman *cónicas centrales.*

d) El centro de una cónica central biseca a todas sus cuerdas de la misma que pasan por él, y, por tanto, es un centro de simetría de la cónica.

e) Todas las cónicas propias circunscritas a un paralelogramo tienen sus centros en el centro de éste.

f) Si C es el centro de una cónica central, TP y TQ son tangentes a la cónica en P y Q, y CT corta a PQ en V y a la cónica en U, entonces $(\overline{CV})(\overline{CT}) = (CU)^2$.

6.2–10 El lugar geométrico de los puntos medios de una familia de cuerdas paralelas de una cónica propia se llama *diámetro* de la cónica. Demuéstrese lo siguiente:

a) Los diámetros de una cónica propia son rectas.

b) Todos los diámetros de una cónica central pasan por el centro.

c) Todos los diámetros de una parábola son paralelos.

d) Las tangentes en los extremos de un diámetro de una cónica central son paralelas a las cuerdas que biseca el diámetro.

e) Si las tangentes en los extremos de una cuerda de una cónica central son paralelas, la cuerda es un diámetro de la cónica.

f) Dos cuerdas de una cónica central que se bisecan son diámetros de la cónica.

6.2–11 Dos diámetros de una cónica central que sean rectas conjugadas, respecto a la cónica, se dice que son un par de *diámetros conjugados* de la cónica. Demuéstrese lo siguiente:

a) Cada uno de los dos diámetros conjugados de una cónica central biseca las cuerdas paralelamente al otro.

b) Las diagonales de un paralelogramo circunscrito a una cónica central son diámetros conjugados de ella; los puntos de contacto son los vértices de un paralelogramo cuyos diámetros son paralelos a las diagonales anteriores.

c) Si cada diámetro de una cónica central es perpendicular a su diámetro conjugado, la cónica es una circunferencia.

6.2–12 Las tangentes a una hipérbola desde su centro se llaman *asíntotas* de la hipérbola. Demuéstrese lo siguiente:

a) Las asíntotas de una hipérbola separan armónicamente a todo par de diámetros conjugados de ella.

b) Supongamos que una recta corta a una hipérbola en Q y Q', y a sus asíntotas en R y R'. Entonces, $RQ = Q'R'$.

c) La parte de una tangente a la hipérbola interceptada por las asíntotas de ésta es bisecada por su punto de contacto.

6.2–13 Con regla únicamente: **a)** trácense las tangentes a una cónica propia desde un punto dado que está en el exterior de ésta. **b)** Trácese la tangente a una cónica propia en un punto dado de ella.

6.2–14 a) Si un pentágono 12345 está inscrito en una cónica propia, demuéstrese que los pares de rectas 12, 45; 23, 51; 34 y la tangente en 1, se cortan en tres puntos colineales.

b) Demuéstrese que los pares de lados opuestos de un cuadrángulo (o cuadrivértice) inscrito en una cónica propia, junto con los pares de tangentes en vértices opuestos, se cortan en cuatro puntos colineales.

c) Demuéstrese que si un triángulo está inscrito en una cónica propia, entonces las tangentes en los vértices cortan a los lados opuestos en tres puntos colineales.

6.2–15 a) Si un pentágono $ABCDE$ está circunscrito a una cónica propia, y F es el punto de contacto del lado AB, demuéstrese que BE, CA, DF son concurrentes.

b) Demuéstrese que las rectas que unen los puntos de contacto de pares de lados opuestos de un cuadrilátero circunscrito a una cónica propia y las dos diagonales del cuadrilátero son concurrentes.

c) Demuéstrese que si un triángulo está circunscrito a una cónica propia, entonces las rectas que unen los vértices y los puntos de contacto de lados opuestos son concurrentes.

6.2–16 Los lados AB, BC, CD, $\cdots$ de un polígono cortan a una cónica propia en A_1 y A_2, B_1 y B_2, C_1 y C_2, $\cdots$. Demuéstrese que

$$(\overline{AA_1})(\overline{AA_2})(\overline{BB_1})(\overline{BB_2})(\overline{CC_1})(\overline{CC_2})\cdots = (\overline{BA_1})(\overline{BA_2})(\overline{CB_1})(\overline{CB_2})(\overline{DC_1})(\overline{DC_2})\cdots.$$

(Esta es una generalización del teorema de Carnot.)

6.2–17 B_1B_2 y A_1A_2 son dos cuerdas variables de una cónica propia trazadas por dos puntos fijos A y B, respectivamente. Si A_1A_2, B_1B_2 se cortan en C, demuéstrese que

$$(BA_1)(BA_2)(CB_1)(CB_2)/(AB_1)(AB_2)(CA_1)(CA_2)$$

es constante.

6.2–18 Una cónica propia corta a los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC en P_1 y P_2, Q_1 y Q_2, R_1 y R_2, respectivamente. BQ_2 y CR_2 se cortan en X, AP_1 y CR_1 en Y, AP_2 y BQ_1 en Z. Demuéstrese que AX, BY, CZ son concurrentes.

6.2–19 El triángulo $A'B'C'$ es circunscrito a una cónica propia; los puntos A, B, C son los de contacto de los lados $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, respectivamente. Si D, E, F se toman sobre BC, CA, AB de modo que AD, BE, CF sean concurrentes, demuéstrese que $A'D$, $B'E$, $C'F$ son también concurrentes.

6.2–20 O es un punto variable de una cónica propia y M y N son un par fijo de puntos conjugados respecto a la cónica; OM y ON cortan a la cónica nuevamente en P y Q. Demuéstrese que PQ pasa por un punto fijo.

6.3. La definición Chasles-Steiner de una cónica propia. En este artículo introduciremos una definición en alternativa de una cónica propia que obtuvieron y utilizaron Michel Chasles y Jacob Steiner en varias de sus obras. La definición es singularmente conveniente para el desarrollo de las propiedades proyectivas de las cónicas. Principiaremos por establecer una generalización proyectiva del teorema 2.4.12.

6.3.1 TEOREMA. *Si* A, B, C, D *son cuatro puntos distintos de una cónica propia, y si* U *y* V *son dos puntos de ella, entonces* U(AB,CD) = V(AB,CD), *donde* U(A), *por ejemplo, se toma como la tangente a la cónica en* A *si* U *coincidiera con* A. (Véase el teorema 2.4.12.)

Una consecuencia sencilla del teorema 6.3.1 es la siguiente:

6.3.2 TEOREMA. *Si* P *es un punto variable de una cónica propia, y si* U *y* V *son dos puntos distintos de la cónica, entonces los haces completos* U(P) *y* V(P) *son homográficos y tales que la recta* U(V) *no corresponda a la* V(U).

Pues si P_1, P_2, P_3, P_4 son cuatro posiciones distintas cualesquiera de P, tenemos, por el teorema 6.3.1, $U(P_1P_2,P_3P_4) = V(P_1P_2,P_3P_4)$. En consecuencia, los haces completos $U(P)$ y $V(P)$ son homográficos. Asimismo, la recta $U(V)$ no puede corresponder a la $V(U)$, ya que si correspondiera, el lugar geométrico de P sería [por el teorema 2.5.3(2)] una recta, lo que es imposible porque el lugar geométrico de P es una cónica propia.

Este último teorema puede ahora restablecerse en la siguiente forma.

6.3.3 TEOREMA. *Una cónica propia que pase por dos puntos distintos,* U *y* V, *puede considerarse como el lugar geométrico de los puntos de inter-*

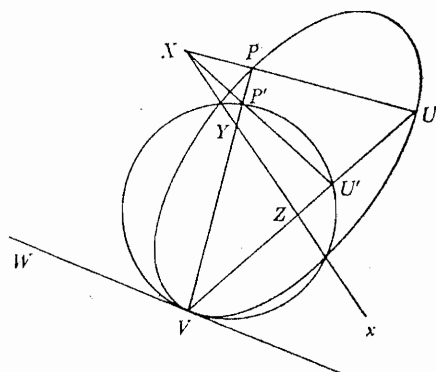


FIG. 6.3a

sección de las rectas correspondientes de dos haces homográficos sobre U *y* V, *donde la recta* U(V) *no corresponde a la* V(U).

Es natural preguntarse si el teorema 6.3.3 también se verifica. Demostraremos que sí.

6.3.4 TEOREMA. *El lugar geométrico de los puntos de intersección de rectas correspondientes de dos haces homográficos con vértices distintos,* U *y* V, *donde la recta* U(V) *no corresponde a la* V(U), *es una cónica propia que pasa por* U *y* V.

Sea P (fig. 6.3a) un punto variable del lugar geométrico; entonces, los haces $U(P)$ y $V(P)$ son homográficos. Supongamos que la recta $V(W)$ corresponda a la $U(V)$. Por hipótesis, $V(W)$ no coincide con $U(V)$. Trá-

cese una circunferencia tangente a VW en V, y supóngase que esta circunferencia corte a VU en U' y a la recta variable VP en P'.

Como los haces $U(V,P)$ y $V(W,P)$ son homográficos y (por el teorema 6.3.2) los haces $V(W,P)$ y $U'(V,P')$ son igualmente homográficos, se deduce que dos haces $U(V,P)$ y $U'(V,P')$ también lo son. Pero en estos últimos dos haces, las rectas o rayos correspondientes $U(V)$ y $U'(V)$ son coincidentes. Se desprende [por el teorema 2.5.3(2)] que la intersección variable, X, de las rectas variables correspondientes, $U(P)$ y $U'(P')$, describe una recta x. Admitamos que PP' y UU' corten a la recta x en los puntos Y y Z.

Ahora giremos la figura de la circunferencia alrededor de la recta x hacia afuera de su plano original, y supongamos que V'', U'', P'' son las nuevas posiciones de V, U', P'. Entonces, $U''P''$, $V''P''$, $V''U''$ cortan la recta x en los puntos X, Y, Z, respectivamente. Por tanto, los triángulos VUP y $V''U''P''$ son coaxiales (sobre x) y tienen, por consiguiente, que ser copolares. Esto es, VV'', UU'', PP'' son concurrentes en un punto O, y la figura VPU es la proyección desde O de la figura $V''P''U''$. Como P'' describe una circunferencia que pasa por U'' y V'', se deduce que P describe una cónica propia que pasa por U y V.

Los teoremas 6.3.3 y 6.3.4 nos dan una condición necesaria y suficiente para que un lugar geométrico de puntos sea una cónica propia. Esta condición puede considerarse como una definición en alternativa de una cónica propia, como sigue.

6.3.5 La definición de Chasles-Steiner de una cónica propia. Una *cónica propia* es el lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas correspondientes de dos haces homográficos con distintos vértices U y V, en los que la recta $U(V)$ no corresponde a la $V(U)$.

Demostraremos ahora un par de teoremas importantes con ayuda de la definición de Chasles-Steiner de una cónica propia.

6.3.6 Teorema. *Una proyectividad transforma una cónica propia en otra cónica propia.*

Es suficiente demostrar que cualquier perspectividad transforma una cónica propia en una cónica propia. Sea c' la imagen, ante una perspectividad, de una cónica propia c. Por la definición de Chasles-Steiner, c es el lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas correspondientes de dos haces homográficos, $U(P)$ y $V(P)$, con vértices distintos U y V, donde la recta $U(V)$ no corresponde a la $V(U)$. Como los haces homográficos de este tipo se proyectan en haces homográficos del mismo tipo, se deduce que c' es el lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas correspondientes de dos haces homográficos $U'(P')$ y $V'(P')$,

donde los vértices U' y V' son distintos y la recta $U'(V')$ no corresponde a la $V'(U')$. Por la definición de Chasles-Steiner, se ve que c' es una cónica propia.

6.3.7 Teorema. *Hay una, y sólo una, cónica propia que pasa por cinco puntos coplanares distintos, tres de los cuales no son colineales.*

Sean los cinco puntos U, V, A, B, C. Tómense U y V como vértices de haces. Por U trácese una recta $U(X)$ y sea $V(Y)$ tal que $U(AB,CX) = V(AB,CY)$. Entonces, las rectas $U(X)$ y $V(Y)$ generan haces homográficos de los que $U(A)$ y $V(A)$, $U(B)$ y $V(B)$, $U(C)$ y $V(C)$ son rectas correspondientes. Como no hay tres puntos de los cinco que sean colineales, la recta $U(V)$ no corresponde a la $V(U)$. Se deduce que, por la definición de Chasles-Steiner, que el lugar geométrico del punto P de intersección de $U(X)$ y $V(Y)$ es una cónica propia que pasa por los cinco puntos dados, U, V, A, B, C. Ahora bien, sólo puede haber una cónica propia que pase por U, V, A, B, C, pues el otro punto, P, en el que una recta arbitraria

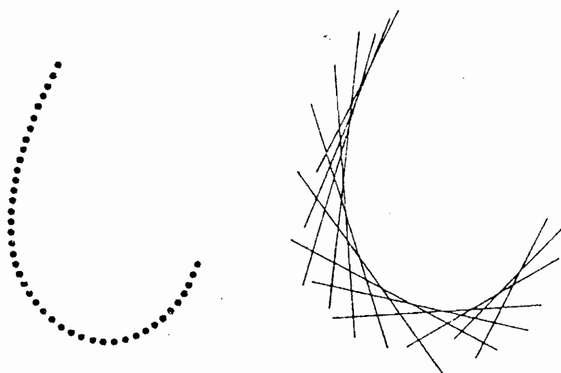


Fig. 6.3b

$U(X)$ corta a una cónica propia que pase por U, V, A, B, C es determinado unívocamente por la relación $U(AB,CP) = V(AB,CP)$. En consecuencia, una recta arbitraria que pase por U cortará a todas las cónicas propias que pasan por U, V, A, B, C en el mismo punto; esto es, todas las cónicas propias coinciden.

6.3.8 Corolario. *Dos cónicas propias distintas pueden cortarse a lo más en cuatro puntos.*

Una curva puede considerarse o bien como el lugar geométrico de sus puntos o como la envolvente de sus tangentes (fig. 6.3b). Desde el primer punto de vista, la curva se llama *curva puntual;* desde el segundo, se llama *curva lineal.* Hasta ahora hemos estado considerando una cónica propia

desde el primer punto de vista, y ahora cambiamos al segundo punto de vista. Introduciremos primero cierta notación conveniente.

6.3.9 Notación. La razón anarmónica de cuatro puntos distintos en los que una recta u es cortada por otras cuatro a, b, c, d se indicará por $u(ab,cd)$. Por $u(a)$ entenderemos el punto en que la base u es cortada por la recta a.

6.3.10 Teorema. *Si* a, b, c, d *son cuatro tangentes distintas a una cónica propia, y si* u *y* v *son dos tangentes cualesquiera a ella, entonces* u(ab,cd) = v(ab,cd), *donde* u(a), *por ejemplo, se toma como punto de contacto de la tangente* a *si* u *concidiera con* a.

Esta es una consecuencia inmediata del teorema de Chasles 6.2.18.

Una fácil consecuencia del teorema 6.3.10 es la siguiente.

6.3.11 Teorema. *Si* p *es una tangente variable de una cónica propia, y si* u *y* v *son dos tangentes distintas a ella, entonces las alineaciones o series completas de puntos* u(p) *y* v(p) *son homográficas y tales que el punto* u(v) *no corresponde al* v(u).

Pues si p_1, p_2, p_3, p_4 son cuatro posiciones distintas cualesquiera de p, tenemos por el teorema 6.3.10, $u(p_1p_2,p_3p_4) = v(p_1p_2,p_3p_4)$. En consecuencia, las alineaciones completas $u(p)$ y $v(p)$ son homográficas. Asimismo, el punto $u(v)$ no puede corresponder al $v(u)$, porque si correspondiera la envolvente de p sería [por el teorema 2.5.3(1)] un punto, lo que es imposible, ya que la envolvente de p es una cónica propia.

Este último teorema puede ahora reestablecerse en la siguiente forma.

6.3.12 Teorema. *Una cónica propia que sea tangente a dos rectas distintas,* u *y* v, *puede considerarse como la envolvente de las rectas que unen puntos correspondientes de dos alineaciones homográficas sobre* u *y* v, *donde el punto* u(v) *no corresponde al* v(u).

Es natural preguntarse si el recíproco del teorema 6.3.12 también es verdadero. Demostraremos que sí lo es.

6.3.13 Teorema. *La envolvente de las rectas que unen los puntos correspondientes de dos alineaciones homográficas sobre distintas bases,* u *y* v, *donde el punto* u(v) *no corresponde al* v(u), *es una cónica propia tangente a* u *y* v.

Sea p (fig. 6.3c) una recta variable de la envolvente y supongamos que p corte a u en P_u y a v en P_v. Entonces, las alineaciones (P_u) y (P_v) son homográficas. Sea U la intersección de u y v, y admitamos que T sobre v corresponda a U sobre u. Por hipótesis, T no coincide con U. Trácese una circunferencia tangente a v en T, y sean u' y p' las otras tangentes a la cir-

cunferencia desde U y P_v, respectivamente. Designemos la intersección de u' y p' por $P_{u'}$.

Como las alineaciones (U,P_u) y (T,P_v) son homográficas, y (por el teorema 6.3.11) las (T,P_v) y $(U,P_{u'})$ son igualmente homográficas, se deduce que las alineaciones (U,P_u) y $(U,P_{u'})$ también son homográficas.

Giremos ahora la circunferencia y sus tangentes u' y p' alrededor de la recta v hacia afuera del plano original, y designemos por u'', p'', $P_{u''}$ las nuevas posiciones de u', p', $P_{u'}$, respectivamente. Como las alineaciones (U,P_u) y $(U,P_{u''})$ son homográficas, y su punto común U es autocorrespondiente, se deduce [por el teorema 2.5.3(1)] que la recta variable $P_uP_{u''}$ pasa por un punto fijo O. Con O como centro de perspectividad, vemos

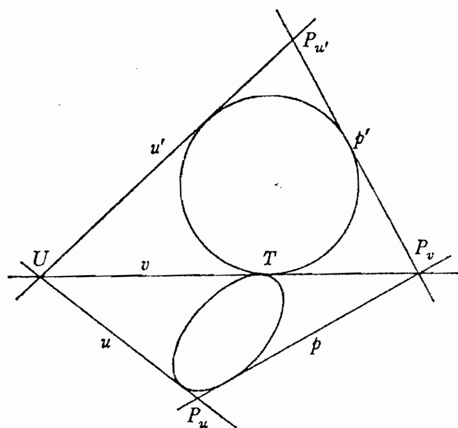


FIG. 6.3c

que la recta variable p'' se proyecta en una recta variable p. Pero la recta variable p'' envuelve una circunferencia (la circunferencia en su nueva posición) tangente a las rectas v y u''. Se desprende que p tiene que envolver la cónica propia tangente a las rectas v y u.

Concluimos el artículo con el siguiente teorema y su corolario.

6.3.14 TEOREMA. *Hay una, y sólo una, cónica propia tangente a cinco rectas coplanares distintas sin que haya tres de ellas concurrentes.*

Sean las cinco rectas (fig. 6.3d) u, v, a, b, c. Tómense u y v como bases de las alineaciones y supongamos que a, b, c corten a u y v en A_u, B_u, C_u y A_v, B_v, C_v, respectivamente. Considérese un punto P_u sobre u y sea $P_{v'}$ sobre v tal que $(A_uB_u,C_uP_u) = (A_vB_v,C_vP_v)$. Entonces, los puntos P_u y P_v generan series de puntos, o alineaciones, homográficas en las que A_u y A_v, B_u y B_v, C_u y C_v son puntos correspondientes. Como no hay tres de las cinco rectas que sean concurrentes, el punto $u(v)$ no corresponde al $v(u)$. Se

deduce (por el teorema 6.3.13) que la envolvente de P_uP_v es una cónica *propia tangente a las cinco rectas* u, v, a, b, c. Ahora bien, puede haber una y sólo una cónica propia tangente a las cinco rectas dadas u, v, a, b, c, pues la otra tangente p, a la cónica propia tangente a u, v, a, b, c, que pasa por un punto arbitrario P_u de u se determina con unicidad por la recta

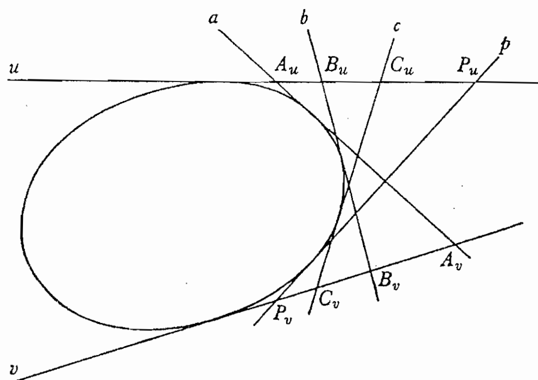


Fig. 6.3d

P_uP_v que da $(A_uB_u,C_uP_u) = (A_vB_v,C_vP_v)$, y se desprende que todas las cónicas propias tangentes a u, v, a, b, c son envolventes de la misma recta variable p, esto es, que todas estas cónicas propias coinciden.

6.3.15 Corolario. *Dos cónicas propias distintas tienen a lo más cuatro tangentes comunes.*

PROBLEMAS

6.3–1 Si la circunferencia y la cónica de la figura 6.3a se cortan en dos puntos distintos del V, demuéstrese que la recta x pasa por los dos puntos.

6.3–2 Si los tres puntos de intersección de pares de lados opuestos de de un hexágono (no necesariamente convexo) son colineales, y si no hay tres vértices del hexágono que sean colineales, demuéstrese que los seis vértices de éste están en una cónica propia. (Este es el recíproco del teorema de Pascal.)

6.3–3 Si las tres rectas de unión de los pares de vértices opuestos de un hexágono (no necesariamente convexo) son concurrentes, y si no hay tres de sus lados que sean concurrentes, demuéstrese que los seis lados del hexágono envuelven una cónica propia. (Este es el recíproco del teorema de Brianchon.)

6.3–4 Si en los lados BC, CA, AB de un triángulo se toman pares de puntos A_1 y A_2, B_1 y B_2, C_1 y C_2 tales que

$$(\overline{AC}_1)(\overline{AC}_2)(\overline{BA}_1)(\overline{BA}_2)(\overline{CB}_1)(\overline{CB}_2) =$$
$$(\overline{AB}_1)(\overline{AB}_2)(\overline{BC}_1)(\overline{BC}_2)(\overline{CA}_1)(\overline{CA}_2),$$

sin que haya tres de los seis puntos A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 que sean colineales, demuéstrese que los seis puntos están en una cónica propia. (Este es el recíproco del teorema de Carnot.)

6.3–5 Demuéstrese que las paralelas trazadas por un punto a los lados de un triángulo cortan a éstos en seis puntos de una cónica propia.

6.3–6 a) Se nos dan cinco puntos de una cónica propia, pero no se conoce la misma. Trácese la tangente a ésta en uno de los cinco puntos.

b) Tenemos cuatro puntos de una cónica propia y la tangente en uno de ellos, pero no se conoce la cónica. Constrúyanse más puntos de ésta.

c) Se dan tres puntos de una cónica propia y las tangentes en dos de ellos, pero no se traza la cónica. Constrúyase, pues, la tangente en el tercer punto.

6.3–7 a) Se dan cinco tangentes a una cónica propia, pero no se traza la cónica. Determínese el punto de contacto de una de las cinco tangentes.

b) Se dan cuatro tangentes a una cónica propia y el punto de contacto de una de ellas, pero no se ha trazado la cónica. Constrúyanse más tangentes a la cónica.

c) Se dan tres tangentes a una cónica propia y los puntos de contacto de dos de ellas, pero no se traza la cónica. Hállese el punto de contacto de la tercera tangente.

6.3–8 Una cónica propia, c, corta a los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC en A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2, respectivamente. A'_1 y A'_2 son los conjugados armónicos de A_1 y A_2 respecto a B y C; B'_1 y B'_2 son los conjugados armónicos de B_1 y B_2 respecto a C y A; C'_1 y C'_2 son los conjugados armónicos de C_1 y C_2 respecto a A y B. Demuéstrese que A'_1, A'_2, B'_1, B'_2, C'_1, C'_2 están en una cónica propia o en dos rectas.

6.3–9 Una tangente variable, PP', corta a dos tangentes paralelas, fijas, a una cónica propia en P y P'. Si A y B son los puntos de contacto de las dos tangentes fijas, demuéstrese que $(\overline{AP})(\overline{BP'})$ es constante.

6.3–10 Una tangente variable corta las asíntotas de una hipérbola en P y P'. Si C es la intersección de las asíntotas, demuéstrese que $(\overline{CP})(\overline{CP'})$ es constante y, por lo tanto, que el triángulo CPP' tiene una área constante.

6.3–11 Sobre la tangente en el punto O de una cónica propia se toma un punto variable P, y se traza PT tangente a la cónica en T. Si S es otro

punto de la cónica, demuéstrese que el lugar geométrico de la intersección de OT y SP es otra cónica propia tangente a la original en O y S.

6.3–12 C y C' son dos puntos fijos de una cónica propia c, r es una recta fija, P es un punto variable de c, CP y $C'P$ cortan a r en R y R'. Demuéstrese que el lugar geométrico de la intersección Q de CR' y $C'R$ es otra cónica.

6.3–13 Dos elipses c y c' son tangentes exteriormente en O. Desde un punto variable, R, sobre la tangente común en O se trazan rectas que sean tangentes a c y c' en P y P'. Demuéstrese que PP' pasa por el punto de intersección de las otras dos tangentes comunes a c y c'.

6.3–14 OPQ es un triángulo fijo y A y B son puntos fijos que no son colineales con O. R y S son puntos variables en OP y OQ tales que RS es paralela a PQ. Demuéstrese que el lugar geométrico del punto de intersección de AR y BS es una cónica que pasa por A, B, C.

6.3–15 A, B, C, D, U, V son seis puntos de una cónica propia. Designemos por J, K, L, M los puntos de intersección de UA y VC, UB y VD, UC y VA, UD y VB. Demuéstrese que J, K, L, M están en una cónica propia que pasa por U y V.

6.3–16 a) Los lados de un triángulo pasan por puntos fijos no colineales y dos de los vértices están en rectas fijas. ¿Cuál es el lugar geométrico del vértice restante?

b) Los vértices de un triángulo están en rectas fijas no concurrentes y dos de los lados pasan por puntos fijos. ¿Cuál es la envolvente del lado restante?

6.3–17 Demuéstrese que si ABC y $A'B'C'$ son dos triángulos inscritos en una cónica propia, entonces sus seis lados son tangentes a otra cónica propia. (Este resultado se debe a Brianchon.)

6.3–18 Se dice que dos triángulos son *polares* respecto a una cónica propia si cada vértice de uno de ellos es el polo de un lado del otro.

Demuéstrese que dos triángulos que sean polares respecto a una cónica propia son copolares entre sí.

6.3–19 Demuéstrese el teorema de Hesse: Si los extremos de dos diagonales de un cuadrilátero completo son puntos conjugados respecto a una cónica propia, entonces los extremos de la tercera diagonal también son puntos conjugados respecto a la cónica.

6.3–20 Si A y B son puntos fijos y AP, BP rectas variables conjugadas entre sí respecto a una cónica propia dada, c, demuéstrese que el lugar geométrico de P es una cónica propia, c', que pasa por A y B y por los puntos en que las polares de A y B, respecto a la cónica c, cortan a c.

6.4 Reciprocidad del principio de dualidad. Hay, en la geometría proyectiva plana, una simetría notable entre puntos y rectas, tal que si se verifica una proposición proyectiva entre "puntos" y "rectas" y se intercambian estas dos palabras, puliendo si fuera necesario las frases resultantes, se obtiene otra proposición proyectiva que se verifica entre "rectas" y "puntos". El lector puede haber observado ya este pareado simétrico de las proposiciones de la geometría proyectiva. Como un ejemplo simple, considérense las dos siguientes proposiciones relacionadas en esta forma:

Dos puntos distintos cualesquiera determinan una y sólo una recta en la que están ambos.

Dos rectas distintas cualesquiera determinan uno y sólo un punto por el que pasan.

En un plano ordinario, sólo la primera de estas dos proposiciones se verifica sin excepción. Sin embargo, en un plano ilimitado, o proyectivo, ambas proposiciones son verdaderas sin excepción, independientemente de que los puntos y rectas de que se trate sean reales o ideales.

Observaremos que al pasar del enunciado de la primera proposición al de la segunda, no sólo intercambiamos las palabras "punto" y "recta", sino que además alteramos algo la frase final. Si no modificásemos la frase final, la segunda proposición sonaría un poquito chabacana. Sin embargo, esta chabacanería de sonido sólo resulta debido a una falta de concordancia en nuestro lenguaje. Como la relación de un punto P que está en una recta l y la de una recta l que pasa por un punto P son relaciones simétricas, un lenguaje perfecto debiera expresar las dos relaciones con una terminología simétrica. Si conviniéramos, en geometría proyectiva, en expresar estas dos relaciones por las dos frases "el punto P está sobre la recta l" y "la recta l está sobre el punto P", empleando este lenguaje modificado, podremos pasar directamente del enunciado de cualquiera de las proposiciones al de la otra simplemente por un intercambio mecánico de las palabras "punto" y "recta".

Por comodidad, llamaremos a dicho lenguaje modificado el *lenguaje con sobre*. La simetría observada entre puntos y rectas en la geometría proyectiva plana conduce al llamado *principio de dualidad* en el plano, que puede establecerse ahora en la forma siguiente:

6.4.1 El principio de dualidad en el plano. *Si en una proposición proyectiva verdadera, enunciada en lenguaje con sobre, entre puntos y rectas de un plano, intercambiamos las palabras "punto" y "recta", obtenemos una segunda proposición proyectiva verdadera, enunciada en lenguaje con sobre, entre rectas y puntos de un plano.*

El principio de dualidad, que parea las proposiciones de la geometría proyectiva plana, es de consecuencias de largo alcance, y fue establecido explícitamente por primera vez por Joseph-Diez Gergonne en 1826, aunque fue conducido a él por los trabajos de Poncelet y otros durante el primer cuarto del siglo diecinueve. Una vez que el principio de dualidad se haya establecido de alguna manera, entonces la demostración de una proposición del par dual automáticamente se transforma en la demostración de la otra.

El teorema de Pascal es una proposición proyectiva; dualicémoslo. Primero volveremos a redactar el teorema de Pascal en el lenguaje con sobre:

Si los seis puntos, 1, 2, 3, 4, 5, 6, *están sobre una cónica puntual propia, entonces los puntos determinados por los tres pares de rectas* (12), (45); (23), (56); (34), (61) *están sobre una recta.*

Dualizando, obtenemos:

Si las seis rectas 1, 2, 3, 4, 5, 6 *están sobre una cónica lineal propia, entonces las rectas determinadas por los tres pares de puntos* (12), (45); (23), (56); (34), (61) *están sobre un punto.*

Este dual es, por supuesto, el teorema de Brianchon. Utilizando un lenguaje menos artificial, el teorema de Pascal y su dual pueden ahora enunciarse así:

Si un hexágono está inscrito en una cónica propia, entonces los puntos de intersección de los tres pares de lados opuestos son colineales.

Si un hexágono está circunscrito a una cónica propia, entonces las rectas que unen los tres pares de vértices opuestos son concurrentes.

Con un poco de práctica, se vuelve uno perito en la dualización de proposiciones de geometría proyectiva sin tener que recurrir al artificial lenguaje con sobre.

Poncelet sostuvo que el principio de dualidad es consecuencia de la teoría de polos y polares, la cual, aunque ya se conocía antes, recibió su primer desarrollo sistemático de sus manos. Si Γ es una cónica propia fija, entonces a cada punto P del plano ilimitado puede relacionarse la polar p' de P respecto a la cónica, y a cada recta l del plano ilimitado puede relacionarse el polo L' de l respecto a la cónica. Esta correspondencia, que mapea los puntos y las rectas del plano ilimitado sobre las rectas y puntos del plano ilimitado, tiene algunas propiedades importantes. En primer lugar, la correspondencia es invariante ante la proyección. Además, un punto y una recta incidentes se mapean en una recta y un punto incidentes, los puntos colineales se mapean en rectas concurrentes y las rectas concurrentes se mapean en puntos colineales.

Imaginemos ahora que hemos establecido una propiedad proyectiva de una figura plana F formada por puntos y rectas. Sea F' la figura que se obtiene al sustituir los puntos y las rectas de F por sus polares y polos con respecto a una cónica propia dada Γ que esté en el plano de F. Entonces se obtendrá de la propiedad proyectiva de la figura F una propiedad proyectiva correspondiente de la figura F', en la que los papeles que juegan las palabras "punto" y "recta" se han intercambiado. Las dos proposiciones serán duales una de otra.

Hemos de confesar que parece que falta la justificación anterior del principio de dualidad. Las figuras de dos teoremas duales no necesitan realmente relacionarse entre sí por una transformación de polo-polar. Realmente, como el enunciado del principio de dualidad no menciona ninguna cónica propia Γ, parecerá conveniente justificar el principio sin la intervención de tal cónica. Se siente que el principio de dualidad necesita un manejo más profundo y general que el dado por Poncelet. Dicho tratamiento general se expondrá en el Capítulo VIII; y aun otro tratamiento general, uno analítico, se expondrá en la primera parte del segundo volumen de nuestra obra.

Antes de terminar este artículo, consideraremos brevemente la transformación de Poncelet polo-polar en una cónica propia Γ; la transformación es una generalización de la considerada en el artículo 3.6, y se utiliza mucho en tratamientos más extensos de geometría proyectiva.

6.4.2 DEFINICIONES. Sea Γ una cónica propia fija. Entonces, la transformación que mapea cada punto P del plano ilimitado en su recta polar p' con respecto a Γ se llama *reciprocidad* en (o respecto a) Γ. La cónica Γ se llama *cónica-base* de la reciprocidad. Cada una de las figuras se llama *polar recíproca* de la otra o, simplemente, *recíproca.*

6.4.3 TEOREMA. 1) *La recíproca de una curva puntual es una curva lineal.* 2) *La recíproca de una recta (considerada como una alineación o serie de puntos colineales) es un punto (considerado como vértice de un haz de rectas concurrentes).* 3) *La recíproca de cónica-base es ella misma.* 4) *La reciprocidad en (o respecto a) una cónica-base dada es involutiva.*

6.4.4 TEOREMA. *La recíproca de una cónica propia es una cónica propia.*

Considérese (teorema 6.3.3) una cónica propia obtenida como el lugar geométrico del punto P de intersección de las rectas correspondientes de dos haces homográficos sobre (o de) distintos vértices, U y V donde la recta $U(V)$ no corresponde a la recta $V(U)$. Los recíprocos de estos haces homográficos sobre (o de) distintos vértices son dos series o alineaciones homográficas sobre (o de) distintas bases, y las recíprocas de las

intersecciones de las rectas o rayos correspondientes de los haces son las de unión de los puntos correspondientes de las dos alineaciones. Se deduce que la recíproca de la cónica propia es la envolvente de las uniones p' de los puntos correspondientes de dos alineaciones homográficas sobre (o de) distintas bases, u' y v', donde el punto $u'(v')$ no corresponde al $v'(u')$. Se desprende (por el teorema 6.3.13) que la recíproca de la cónica propia es una cónica propia.

Un plano que pase por el vértice de un cono circular puede cortar al cono en un par de rectas. Dicha sección de cono circular se llama *cónica impropia, o degenerada, del primer tipo.* Para que el teorema 6.4.4 se verifique tanto para cónicas propias como impropias, se acostumbra definir un par de puntos (considerados como vértices de los haces que pasan por ellos) como *cónica impropia del segundo tipo.* Obsérvese que el teorema de Pappus 6.1.13 es el teorema de Pascal para una cónica impropia del primer tipo.

PROBLEMAS

6.4–1 Hágase una descripción de cada una de las siguientes figuras, dualícese la descripción y dibújese la figura dual.

(**a**)

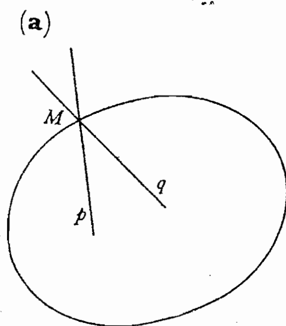


Fig. 6.4a

(**b**)

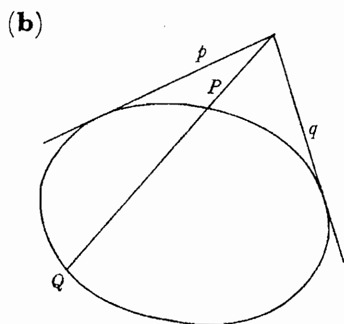


Fig. 6.4b

6.4–2 ¿Cuál es el dual del cuadrivértice completo?

6.4–3 Enúnciese el dual del siguiente teorema: Si los puntos X, Y, U son colineales y si $X(AB,CU) = Y(AB,CU)$, entonces los puntos A, B, C son colineales.

6.4–4 Enúnciese el dual del siguiente teorema: ABC es un triángulo, L un punto fijo de AB, O un punto variable de CL. Si AO corta a CB en P y BO corta a CA en Q, entonces PQ corta a AB en un punto fijo M.

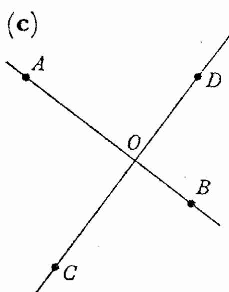


FIG. 6.4c

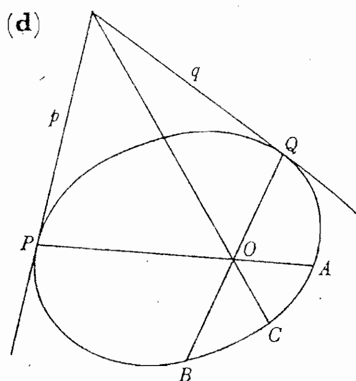


FIG. 6.4d

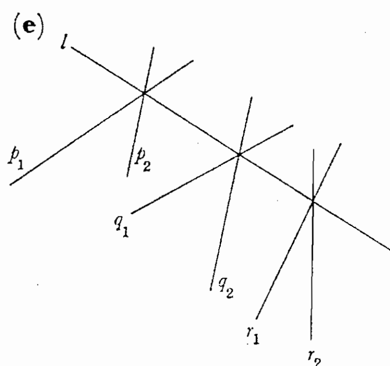


FIG. 6.4e

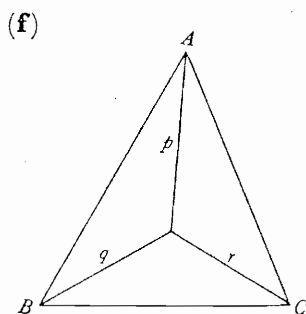


FIG. 6.4f

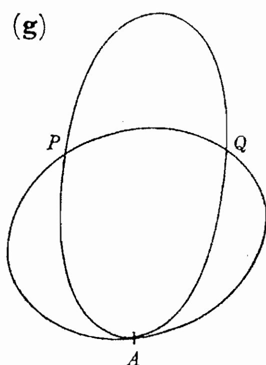


FIG. 6.4g

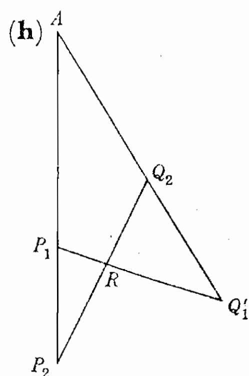


FIG. 6.4h

6.4–5 Enúnciese el dual del siguiente teorema: Los triángulos copolares son coaxiales.

6.4–6 Enúnciese el dual del teorema de Pappus 6.1.13.

6.4–7 Dualícese: **a**) El teorema 6.2.1; **b**) el teorema 6.2.5; **c**) el teorema 6.2.8; **d**) el teorema 6.2.14.

6.4–8 Demuéstrese que los teoremas 6.2.11 y 6.2.12 son duales uno del otro.

6.4–9 Demuéstrese que el recíproco de un polo y una polar respecto a una cónica propia es una polar y un polo respecto a la cónica recíproca.

6.4–10 Demuéstrese que el recíproco de un triángulo autoconjugado respecto a una cónica c es un triángulo autoconjugado respecto a la cónica recíproca de c.

6.4–11 Enúnciese el teorema de Pascal, el de Pappus y sus inversos como un solo teorema.

6.4–12 **a**) Un punto se mueve sobre una recta. Demuéstrese que el punto de intersección de sus rectas polares, con respecto a dos cónicas propias dadas, describe una cónica.

b) Enúnciese el dual del teorema de la parte (a).

6.4–13 **a**) Se dan seis puntos coplanares, A, B, C, D, E, P, sin que haya tres de los A, B, C, D, E que sean colineales. Hállese la polar de P con respecto a la cónica propia que pase por A, B, C, D y E.

b) Se dan seis rectas coplanares, a, b, c, d, e, p, sin que haya tres de las a, b, c, d, e que sean concurrentes. Hállese el polo de p con respecto a la cónica propia tangente a a, b, c, d, e.

6.4–14 **a**) Un punto se mueve sobre una cónica propia. Demuéstrese que la recta polar del punto con respecto a una segunda cónica propia envuelve una tercera cónica propia.

b) Enúnciese el dual del teorema de la parte (a).

6.4–15 **a**) La polar de un punto A con respecto a una cónica es a, y el polo de a con respecto a otra cónica es A'. Demuéstrese que a medida que A se desplaza sobre una recta, A' también se desplaza sobre una recta.

b) Enúnciese el dual del teorema de la parte (a).

6.4–16 **a**) Demuéstrese que las rectas que unen los vértices de un triángulo con dos puntos cualesquiera de su plano cortan a los lados opuestos en seis puntos que están en una cónica.

b) Enúnciese el dual del teorema de la parte (a).

6.4–17 **a**) Si AL, BM, CN son tres rectas cevianas concurrentes del triángulo ABC, demuéstrese que hay una cónica propia tangente a BC, CA, AB en L, M, N, respectivamente.

b) Enúnciese el dual del teorema de la parte (a).

6.4–18 Un *punto*-n *plano completo* es una figura formada por n puntos coplanares, tres de los cuales no son colineales, y las ${}_nC_2$ rectas determinadas por ellos. Descríbase una *recta*-n *plana completa* si es el dual de un punto-n plano completo.

6.4–19 Una figura plana formada de puntos y rectas se llama *configuración* (plana) si está formada por a_{11} puntos y a_{22} rectas tales que cada punto esté sobre el mismo número (a_{12}) de rectas y cada recta esté en el mismo número (a_{21}) de puntos. Una configuración (plana) se representa simbólicamente por la matriz.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

a) Demuéstrese que el dual de la configuración es una configuración, y dése su matriz.

b) Demuéstrese que la figura del teorema de Desargues en el plano es una configuración autodual y dése su matriz.

c) Demuéstrese que un punto-n plano completo y una recta-n plana completa son configuraciones, y dénse sus matrices.

6.4–20 Un *punto*-n *espacial completo* es una figura formada por n puntos, cuatro de los cuales no son coplanares, ni tres colineales, junto con todas las ${}_nC_2$ rectas y todos los ${}_nC_3$ planos determinados por ellas. Demuéstrese que la configuración de Desargues en un plano es una sección plana de un punto-5 espacial completo.

6.5 La propiedad del foco y la directriz. Hemos definido una cónica propia como una sección de un cono circular, recto u oblicuo, por un plano que no pase por su vértice. Es un hecho notable, que no estableceremos aquí, que todas las cónicas propias pueden obtenerse como secciones de conos circulares *rectos;* realmente, todas pueden hallarse como secciones de un cono circular recto dado.

Utilizando el hecho anterior de que una cónica propia es siempre una sección de un cono circular recto, deduciremos ahora una propiedad básica de estas curvas que se emplea corrientemente cuando se estudian por geometría analítica.

6.5.1 TEOREMA. *Una cónica propia no circular es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de modo que la razón de su distancia a un punto fijo del plano a su distancia a una recta fija del mismo, que no pase por el punto fijo, es constante.*

Considérese la cónica como la sección por un p plano que corta a un cono circular recto (fig. 6.5a). Sea s una esfera en el interior del cono,

tangente al mismo a lo largo de la circunferencia k, cuyo plano llamaremos q, y tangente además al plano p en el punto F. Supongamos que los planos p y q se corten en una recta d. Desde P, un punto de la sección cónica, bájese una perpendicular, PR, a la recta d y otra perpendicular PS al plano q. Consideremos que la generatriz del cono que pasa por P corta a q en el punto E. Finalmente, sea α el ángulo de los planos p y q, y β el que una generatriz del cono forma con el plano q. Entonces, como $PF = PE$

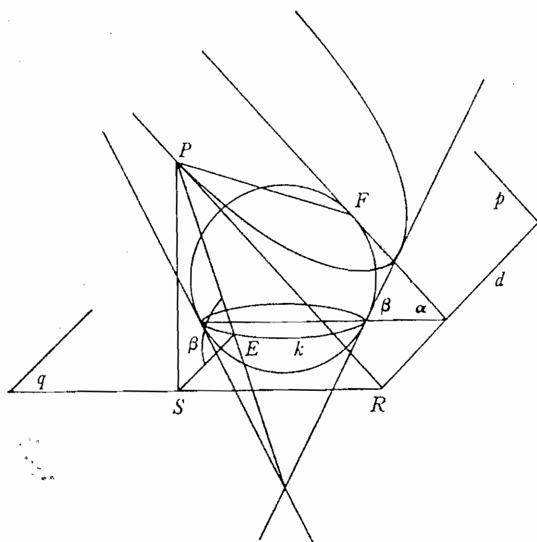


FIG. 6.5a

(siendo estos segmentos tangentes a la esfera desde un punto exterior a ella) y los triángulos PSE y PSR son rectángulos con sus ángulos rectos en S, tenemos

$$PF/PR = PE/PR = (PS/PR)/(PS/PE) = \operatorname{sen}\alpha/\operatorname{sen}\beta = e,$$

una constante independiente de la posición de P sobre la cónica. La cónica puede, por tanto, considerarse como la curva generada por un punto P que se mueve en el plano p de modo que la razón de su distancia al punto F de p a su distancia a la recta d de p es una constante, e.

6.5.2 DEFINICIONES. El punto fijo F del teorema 6.5.1 se llama *foco* de la cónica; la recta fija d, su *directriz,* y la constante e es la *excentricidad* de la cónica.

6.5.3 TEOREMA. *Si* e *es la excentricidad de una cónica propia, entonces ésta es una parábola, una elipse o una hipérbola, según que* e $= 1$, e < 1 o e > 1.

Si el p plano de la figura 6.5a es paralelo a una y sólo a una generatriz del cono, entonces $\alpha = \beta$ y $e = 1$; si el p plano corta a todas las generatrices de una hoja del cono, entonces $\alpha < \beta$ y $e < 1$; si p corta a ambas hojas del cono, entonces $\alpha > \beta$ y $e > 1$.

6.5.4 OBSERVACIÓN. Cuando el p plano de la figura 6.5a es paralelo al q, la sección es una circunferencia. En este caso no hay directriz finita d, pero se ve fácilmente que esta situación puede considerarse como una posición límite obtenida haciendo que la intersección d de los planos p y q se aleje cada vez más del cono, acercándose el ángulo α, y, en consecuencia, también la fracción $\operatorname{sen} \alpha / \operatorname{sen} \beta$, cada vez más a 0. Este hecho se describe diciendo que la directriz de una circunferencia está en el infinito y que su excentricidad es 0.

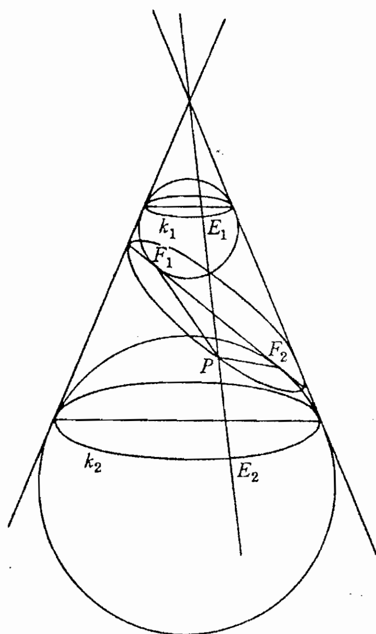


FIG. 6.5b

6.5.5 TEOREMA. *Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de modo que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano sea constante.*

Consideremos la elipse como una sección de un cono circular recto (fig. 6.5b). Sean s_1 y s_2 dos esferas tangentes al p plano de la elipse en los puntos F_1 y F_2, respectivamente, y tangentes al cono a lo largo de las circunferencias paralelas k_1 y k_2, respectivamente. Unase un punto arbitrario

P de la elipse con F_1 y F_2, y supóngase que la generatriz del cono que pasa por P corte a k_1 y k_2 en E_1 y E_2, respectivamente. Entonces $PF_1 = PE_1$ y $PF_2 = PE_2$ (cada par de segmentos iguales siendo rectas tangentes a la esfera desde un punto exterior a ella). Se sigue que

$$PF_1 + PF_2 = PE_1 + PE_2 = E_1E_2,$$

una constante independiente de la posición de P sobre la elipse.

Obsérvese que si la elipse es una circunferencia, entonces F_1 y F_2 coinciden con el centro de la circunferencia.

6.5.6 TEOREMA. *Una hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de modo que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano sea constante.*

Se deja al lector el establecimiento de este teorema, siguiendo las líneas de la demostración del teorema 6.5.5.

El enfoque simple y elegante de este artículo fue descubierto alrededor de la primera cuarta parte del siglo diecinueve por dos geómetras belgas: Adolphe Quetelet (1796-1874) y Germinal Dandelin (1794-1847).

PROBLEMAS

6.5–1 Establézcase el teorema 6.5.6.

6.5–2 Demuéstrese que las hipérbolas, y las elipses no circulares, tienen dos focos distintos y dos directrices relacionadas, siendo cada directriz perpendicular a la recta que une los dos focos.

6.5–3 Demuéstrese que existe una elipse para cada excentricidad positiva $e < 1$, y que existe una hipérbola para cada excentricidad $e > 1$.

6.5–4 Demuéstrese que hay dos secciones planas de un cono circular recto que tienen un foco en un punto dado que está dentro del cono.

6.5–5 Demuéstrese que las secciones de un cono circular recto por planos paralelos tienen las excentricidades iguales.

6.5–6 Si se dan una elipse y un cono circular recto, hállese una sección del cono congruente con la elipse.

6.5–7 Demuéstrese que la suma de las distancias del vértice de un cono circular recto a los extremos de un diámetro de una sección elíptica dada es constante.

6.6 Proyección ortogonal. Sean π y π' dos planos que no sean perpendiculares. El mapeo del plano π sobre el π' que transporta cada punto P de π al pie, P', de la perpendicular desde P a π' se llama *proyección ortogonal* del plano π sobre el π'.

La proyección ortogonal, siendo una clase particular de perspectividad, tiene todas las propiedades de este tipo de correspondencia, pero tiene además algunas propiedades especiales que no tienen todas las perspectividades. Debido a estas propiedades especiales la proyección ortogonal es una transformación tan útil. Estableceremos ahora algunas de estas propiedades especiales.

6.6.1 TEOREMA. *Ante una proyección ortogonal de un plano* π *sobre otro plano* π' *no perpendicular a* π:

1) *los puntos ordinarios corresponden a puntos ordinarios,*
2) *las rectas en el infinito se corresponden,*
3) *las rectas paralelas corresponden a rectas paralelas,*
4) *la razón de dos segmentos de una recta no se alteran,*
5) *la razón de dos segmentos sobre rectas paralelas no se alteran,*
6) *el centroide de un triángulo corresponde al centroide del triángulo correspondiente,*
7) *si* A *y* A′ *son dos áreas correspondientes, entonces* $A' = A \cos \theta$, *donde* θ *es el ángulo formado por los planos* π *y* π',
8) *la razón de dos áreas no se altera,*
9) *las circunferencias se mapean en elipses homotéticas.*

La primera propiedad es evidente y las dos siguientes son consecuencias de la primera. Las propiedades (4) y (5) se desprenden del hecho de que la longitud de un segmento rectilíneo de π' es igual a la longitud del segmento correspondiente de π multiplicada por el coseno del ángulo formado por las rectas de los dos segmentos. La propiedad (6) es consecuencia de la (4). La propiedad (7) se deduce de que cualquier área de π puede considerarse como el límite de la suma de franjas delgadas rectangulares de anchura común paralelas a la recta de intersección de los planos π y π', tomándose el límite a medida que el número de franjas aumenta indefinidamente; las longitudes de estas franjas no se alteran por la proyección, pero su anchura w se convierte en $w \cos \theta$. La propiedad (8) es una consecuencia de la (7). Una circunferencia se proyecta claramente en una elipse cuyo eje mayor es paralelo a la recta de intersección de los planos π y π'; asimismo, si a y b son los semiejes mayor y menor de la elipse, y r es el radio de la circunferencia, $a = r$ y $b = r \cos \theta$, y la propiedad (9) se desprende.

6.6.2 TEOREMA. *Cualquier elipse puede proyectarse ortogonalmente en una cicunferencia.*

Sean π el plano de la elipse y a y b los semiejes mayor y menor de ella. Trácese por una recta de π paralela al semieje menor de la elipse un plano que forme un ángulo $\alpha = \cos^{-1} (b/a)$* con π. El lector puede ahora de-

* Aceptamos la expresión $\cos^{-1}$ para arc cos. (N. del R.)

mostrar fácilmente que la proyección ortogonal de la elipse sobre el plano π es una circunferencia de radio b.

6.6.3 COROLARIO. *Si una elipse se proyecta ortogonalmente en una circunferencia, entonces las circunferencias del plano de proyección corresponden a las elipses del plano original que son homotéticas con la elipse dada.*

6.6.4 TEOREMA. *Cualquier triángulo puede proyectarse ortogonalmente en un triángulo equilátero.*

Sea ABC el triángulo dado y sean L, M, N los puntos medios de los lados BC, CA, AB, respectivamente. Por el problema 6.4–17(a), hay una cónica propia, que en este caso debe ser evidentemente una elipse, tangente a BC, CA, AB en L, M, N. Proyéctese ortogonalmente esta elipse en una circunferencia (por el teorema 6.6.2), transformando o mapeando el triángulo ABC y los puntos L, M, N en el triángulo $A'B'C'$ y los puntos L', M', N'. Entonces, como $B'L' = L'C' = C'M' = M'A' = A'N' = N'B'$, se deduce que el triángulo $A'B'C'$ es equilátero.

Daremos ahora algunas aplicaciones de la proyección ortogonal; otras aplicaciones se encontrarán en los problemas del final del artículo; el lector deberá observar el empleo del procedimiento *transformar-resolver-invertir.*

6.6.5 TEOREMA. *Una condición necesaria y suficiente para que un triángulo inscrito en una elipse tenga área máxima es que el centroide del triángulo coincida con el centro de la elipse.*

Proyéctese ortogonalmente la elipse en una circunferencia (teorema 6.6.2). Los triángulos de área máxima de la elipse corresponden a los de área máxima en la circunferencia [teorema 6.6.1(8)]. Pero una condición necesaria y suficiente para que un triángulo inscrito en una circunferencia tenga área máxima es que sea equilátero, y una condición necesaria y suficiente para que el triángulo sea equilátero es que su centroide coincida con el centro de la circunferencia. El teorema se desprende ahora [teorema 6.6.1(6) y corolario 6.6.3].

6.6.6 TEOREMA. *La envolvente de las cuerdas de una elipse, cada una de las cuales separe de ésta un segmento de área constante, es otra elipse homotética concéntrica.*

Proyéctese ortogonalmente la elipse en una circunferencia (teorema 6.6.2). La cuerda variable de la elipse corresponderá a una cuerda variable de la circunferencia que corte o separe en ésta un segmento circular de área constante [teorema 6.6.1(8)]. Pero la envolvente de la cuerda variable de la circunferencia es una circunferencia concéntrica. Se desprende, pues, el teorema (corolario 6.6.3).

6.6.7 Teorema. *El área de un triángulo* DEF *inscrito en un triángulo dado* ABC *no puede ser menor que la de cada uno de los otros tres triángulos formados.* (Véase el problema 4908, *The American Mathematical Monthly,* abril de 1961, pág. 386.)

Proyéctese ortogonalmente el triángulo inscrito, *DEF,* en uno equilátero, *D'E'F* (fig. 6.6a). Basta demostrar el teorema para la figura proyectada [teorema 6.6.1(8)]. Ahora bien, si el triángulo *A'B'C'* fuera equilátero, en-

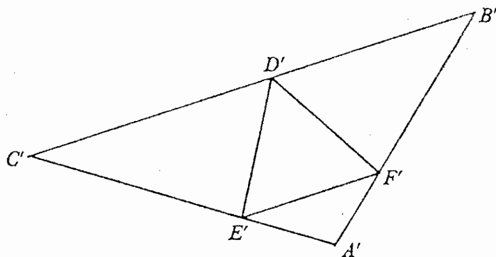


Fig. 6.6a

tonces evidentemente no podrá haber ninguna área de un subtriángulo que exceda la de *D'E'F'*. En caso contrario, habrá algún ángulo, digamos *A'*, mayor que 60°. Pero entonces la perpendicular desde *A'* a *E'F'* será menor que la trazada desde *D'* a *E'F'*, y el área del triángulo *D'E'F'* será mayor que la del *A'E'F'*.

6.6.8 Teorema. *Si en el hexágono convexo,* ABCDEF, *los lados opuestos son paralelos, entonces los triángulos* ACE *y* BDF *tienen áreas iguales.* (Art. 5.5.15.)

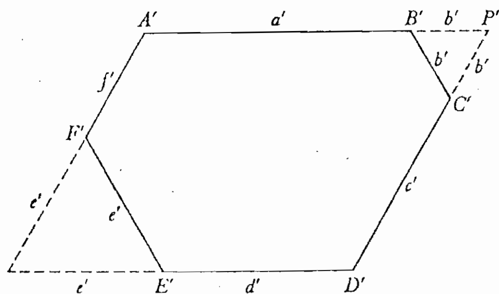


Fig. 6.6b

Supongamos que *AB* y *DC* se corten en *P*. Proyéctese ortogonalmente el triángulo *BCP* en el equilátero *B'C'P'* (fig. 6.6b). Entonces, el hexágono dado *ABCDEF* se proyecta en el *A'B'C'D'E'F'* cuyos lados opuestos siguen siendo paralelos, pero en el cual todos sus ángulos son iguales a 120°. De-

signando los lados consecutivos de $A'B'C'D'E'F'$, empezando por el lado $A'B'$, por a', b', c', d', e', f', basta entonces (porque área $A'B'C' = (a'b' \operatorname{sen} 120^\circ)/2$, etc.) demostrar que

$$(1) \qquad a'b' + c'd' + e'f' = f'a' + b'c' + d'e'.$$

Pero (véase la figura), $a' = d' + e' - b'$ y $c' = e' + f' - b'$, y cuando estos valores de a' y c' se sustituyen en (1) obtenemos una identidad. De donde se desprende el teorema.

PROBLEMAS

6.6–1 Demuéstrese que el área de una elipse con semiejes a y b es πab.

6.6–2 Demuéstrese que un triángulo de área máxima inscrito en una elipse tiene sus lados paralelos a las tangentes a dicha curva en los vértices opuestos.

6.6–3 Hállese el área máxima que puede tener un triángulo inscrito en una elipse de semiejes a y b.

6.6–4 Hállese el área mínima que puede tener una elipse circunscrita a un triángulo dado de área K.

6.6–5 Demuéstrese que si una elipse se proyecta ortogonalmente en una circunferencia, entonces los pares de diámetros perpendiculares de la circunferencia corresponden a pares de diámetros conjugados de la elipse. (Para una definición de *diámetros conjugados,* véase el problema 6.2–11.)

6.6–6 Demuéstrese que el área de un triángulo, dos de cuyos lados son radios conjugados de una elipse, es constante.

6.6–7 Demuéstrese que un triángulo de área máxima inscrito en una elipse, y que tenga una cuerda fija por base, tiene su vértice opuesto en un extremo del diámetro conjugado del paralelo a la base.

6.6–8 Constrúyase el triángulo de área máxima que pueda inscribirse en una elipse dada y que tenga uno de sus vértices en un punto dado de la elipse.

6.6–9 Si PP', QQ' son un par de cuerdas paralelas variables de una elipse que pasa por dos puntos fijos P y Q, demuéstrese que $P'Q'$ envuelve una elipse homotética concéntrica.

6.6–10 AOB y $A'O'B'$, COD y $C'O'D'$ son pares de cuerdas paralelas de una elipse. Demuéstrese que

$$(OA)(OB)/(OC)(OD) = (O'A')(O'B')/(O'C')(O'D').$$

6.6–11 Se dan dos elipses homotéticas concéntricas. Demuéstrese que todas las cuerdas de la exterior que sean tangentes a la interior son bisecadas por el punto de contacto.

6.6–12 Demuéstrese que dos tangentes paralelas a una elipse son cortadas por otra tangente cualquiera en puntos que están en las prolongaciones de diámetros conjugados.

6.6–13 TP, TQ son tangentes a una elipse y TRS es una secante de ella. Si V es el punto medio de RS y si QV corta la elipse nuevamente en U, demuéstrese que PU es paralela a TS.

6.6–14 Demuéstrese que la mayor elipse que pueda inscribirse en un paralelogramo es tangente a éste en los puntos medios de sus cuatro lados.

6.6–15 Demuéstrese que la cuerda de una elipse que pase por un punto fijo y corte o separe la máxima o mínima área es bisecada por el punto.

6.6–16 Tres elipses homotéticas congruentes de semiejes a y b son tales que cada una es tangente a las otras dos exteriormente. Hállese el área del triángulo curvilíneo limitado por las tres elipses.

6.6.–17 Utilizando la proyección ortogonal obténgase una generalización del siguiente teorema: los pies de las perpendiculares trazadas desde un punto de la circunferencia circunscrita a un triángulo a los lados de éste son colineales.

6.6–18 Utilizando la proyección ortogonal obténgase una generalización del siguiente teorema: el centro de una circunferencia inscrita en un cuadrilátero es colineal con los puntos medios de las diagonales del mismo.

6.6–19 Empleando la proyección ortogonal obténgase una generalización del siguiente teorema: si una cuerda, AQ, de una circunferencia de radio r corta el diámetro de la circunferencia perpendicular al diámetro que pasa por A en el punto R, entonces $(AQ)(AR) = 2r^2$.

6.6–20 Demuéstrese, sin utilizar límites, que si A y A' son las áreas de dos triángulos correspondientes ante una proyección ortogonal, entonces $A' = A \cos \theta$, donde θ es el ángulo que forman los planos de los dos triángulos.

BIBLIOGRAFIA

(Los tratamientos puramente analíticos de la geometría proyectiva no se dan aquí.)

ADLER, C. F., *Modern Geometry, and Integrated First Course*. Nueva York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1958.

ASKWITH, F. H., *A Course of Pure Geometry, Containing a Complete Geometrical Treatment of the Properties of the Conic Sections*. Nueva York: Cambridge University Press, 1926.

BAKER, H. F., *An Introduction to Plane Geometry*. Nueva York: Cambridge University Press, 1943.

COURANT, RICHARD, y HERBERT ROBBINS, *What is Mathematics?* Nueva York: Oxford University Press, 1941.

COXETER, H. S. M., *The Real Projective Plane,* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1949.

———, *Introduction to Geometry,* Nueva York: John Wiley and Sons, Incorporated, 1961.

CREMONA, LUIGI, *Elements of Projective Geometry,* traducida al inglés por Charles Leudesdorf, Nueva York: Oxford University Press, 1885.

DOWLING, L. W., *Projective Geometry.* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1917.

FAULKNER, T. E., *Projective Geometry.* Nueva York: Interscience Publishers, Inc., 1949.

FILON, L. N. G., *An Introduction to Projective Geometry,* 4ª ed. Londres: Edward Arnold and Company, 1935.

FISHBACK, W T., *Projective and Euclidean Geometry.* Nueva York: John Wiley and Sons, Inc., 1962.

FORDER, H. G., *Geometry,* Nueva York: Hutchinson's University Library, 1950.

GOODSTEIN, R. L., y E. J. F. PRIMROSE, *Axiomatic Projective Geometry.* Leicester: University College, 1953.

GRAUSTEIN, W. C., *Introduction to Higher Geometry,* Nueva York: The Macmillan Company, 1930.

HEADING, J., *An Elementary Introduction to the Methods of Pure Projective Geometry,* Nueva York: St. Martin's Press, 1958.

HILBERT, DAVID, y S. COHN-VOSSEN, *Geometry and the Imagination,* traducida por P. Nemenyi, Nueva York: Chelsea Publishing Company, 1952.

HOLGATE, T. F., *Projective Geometry,* Nueva York: The Macmillan Company, 1930.

JAMES, GLEEN, ed., *The Tree of Mathematics,* Pacoima, Cal.: The Digest Press, 1957.

LEHMER, D. N., *An Elementary Course in Synthetic Projective Geometry.* Boston: Ginn and Company, 1917.

LING, G. H., GEORGE WENTWORTH y D. E. SMITH, *Elements of Projective Geometry,* Boston: Ginn and Company, 1922.

MACAULEY, F. R., *Geometrical Conics,* 2ª ed. Nueva York: Cambridge University Press, 1906.

MATHEWS, G. B., *Projective Geometry,* Nueva York: Longmans, Green and Company, 1914.

MILNE, J. J., *An Elementary Treatise on Cross-Ratio Geometry,* Nueva York: Cambridge University Press, 1911.

MILNE, W. P., *Projective Geometry for Use in Colleges and Schools,* Nueva York: The Macmillan Company, 1911.

PATTERSON, B. C., *Projective Geometry,* Nueva York: John Wiley and Sons, Inc., 1937.

ROBINSON, G. de B., *The Foundations of Geometry,* Toronto: University of Toronto Press, 1946.

RUSSELL, J. W., *An Elementary Treatise on Pure Geometry,* 2ª ed., Nueva York: Oxford University Press, 1905.

SANGER, R. G., *Synthetic Projective Geometry,* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1939.

SEIDENBERG, A., *Lectures in Projective Geometry.* Princeton, N. J.: D. Van Nostrand Company, Inc., 1962.

VEBLEN, OSWALD y J. W. YOUNG, *Projective Geometry,* 2 vols. Boston: Ginn and Company, 1910, 1918.

WINGER, R. M., *An Introduction to Projective Geometry,* Boston: D. C. Heath and Company, 1923. Reimpreso por Dover Publications, Inc., 1962.

YOUNG, J. W., *Projective Geometry,* Carus Mathematical Monograph núm. 4. Buffalo, N. Y.: Mathematical Association of America, 1930.

———, ed., *Monographs on Topics of Modern Mathematics Relevant to the Elementary Field,* Nueva York: Longmans, Green and Company, 1911. Reimpreso por Dover Publications, Inc., 1955.

VII. GEOMETRIA NO EUCLIDIANA

POCO DESPUES DE LA PRIMERA CUARTA PARTE del siglo diecinueve tuvo lugar un evento geométrico que demostró ser de tremenda importancia, no sólo para la geometría, sino para todas las matemáticas; se inventó una geometría que difería radicalmente de la geometría tradicional de Euclides. Antes de este evento se pensó que había, y realmente existía, sólo una geometría posible, y que cualquier descripción del espacio contraria a la exposición euclidiana debía ser necesariamente incompatible y contradictoria.

La geometría se liberó de su molde tradicional, y los postulados de la geometría se convirtieron, para el matemático, simplemente en hipótesis, de cuya verdad o falsedad físicas no era necesario preocuparse. Se evidenció que los matemáticos podían elegir sus postulados adecuados a su conveniencia siempre que fueran compatibles unos con otros. Un postulado, como lo emplea el matemático, no necesita ser autoevidente ni veraz.

Con la posibilidad de inventar dichas geometrías puramente "artificiales", se hizo evidente que el espacio físico debería mirarse como un concepto empírico deducido de nuestras experiencias exteriores, y que los postulados de una geometría ideada para describir el espacio físico son simplemente expresiones de esta experiencia (igual que las leyes de una ciencia física). Este punto de vista está en sorprendente contraste con la teoría

kantiana del espacio que dominaba el pensamiento filosófico en la época de la invención de la nueva geometría. La teoría kantiana sostuvo que el espacio es un sistema de referencia que ya existía intuitivamente en la mente humana, que los axiomas y postulados de la geometría euclidiana son juicios *a priori* impuestos en la mente, y que sin dichos axiomas y postulados no es posible hacer ningún razonamiento compatible acerca del espacio. La invención de una geometría no euclidiana hizo completamente insostenible este punto de vista.

La invención de una geometría no euclidiana, invalidando una creencia tradicional y rompiendo con el hábito de pensar que se había tenido durante siglos, asestó un fuerte golpe al punto de vista de la *verdad absoluta* de las matemáticas. Realmente, la invención no sólo liberó la geometría, sino que tuvo un efecto semejante en las matemáticas como un todo. Las matemáticas emergieron como una creación arbitraria de la mente humana, y no como algo que esencialmente nos haya impuesto forzosamente el mundo en que vivimos.

Este capítulo trata de la primera geometría no euclidiana que se inventó, la llamada geometría lobachevsquiana. Comenzaremos con un bosquejo de los antecedentes históricos que condujeron a este descubrimiento trascendental; probablemente en ningún sitio de todo el estudio de las matemáticas es más necesaria una exposición de los orígenes históricos que aquí, para una apreciación verdadera del tema. El efecto amplio del descubrimiento, tanto sobre la geometría en particular como sobre las matemáticas en general, será el tema del siguiente capítulo.

7.1 Antecedentes históricos. Hay evidencia de que la teoría de las paralelas causó un trastorno considerable a los antiguos griegos, y que, en aquel entonces, la teoría comprendía una circularidad ilógica. Euclides salvó la dificultad definiendo las paralelas como rectas coplanares que no se cortan por más que se prolonguen en uno u otro sentido, y adoptando como una suposición básica su ahora famoso quinto postulado, o sea, de las paralelas:

Si una recta que cae sobre dos rectas forma con ellas ángulos interiores del mismo lado cuya suma sea menor que dos rectos, las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortarán del lado en que la suma de los ángulos sea menor que dos rectos.

Si el lector consulta el Apéndice, donde se recogen explicaciones iniciales de Euclides, sus definiciones preliminares, sus postulados y sus axiomas, observará de inmediato una marcada diferencia entre el quinto postulado y los otros cuatro; al quinto postulado le falta la concisión y la simple

comprensibilidad de los otros cuatro. Recordemos (artículo 1.3) que, en un discurso conducido por el método griego de la axiomática material, un postulado se supone que es una proposición primitiva que se siente es *aceptable como inmediatamente verdadera* con base en las propiedades sugeridas en las explicaciones iniciales. Debe confesarse que el quinto postulado difícilmente satisface este requisito de un postulado.

Proclo nos indica que el quinto postulado fue atacado desde el principio. Un examen más estudiado revela que realmente es el recíproco de la proposición I 17 de Euclides. Además, Euclides mismo trató evidentemente de evitar el postulado mientras pudo, pues no lo utilizó en sus demostraciones sino hasta que llegó a la proposición I 29. No es sorprendente que muchos geómetras griegos sintieran que el postulado tiene más de la naturaleza de una proposición que de un postulado. Desde el punto de vista griego de la axiomática material, era ciertamente muy natural preguntarse si el quinto postulado se necesitaba realmente, y pensar que tal vez podría deducirse como un teorema a partir de los nueve restantes "axiomas" o "postulados", o, cuando menos, que podría sustituirse por un equivalente más aceptable.

De los muchos sustitutos que se han ideado para el quinto postulado de Euclides, quizá el más popular es el que hizo en los tiempos modernos el físico y matemático escocés John Playfair (1748-1819), aunque esta alternativa particular había sido avanzada por otros y se había establecido tan primitivamente como en el siglo quinto por Proclo. Es el sustituto que generalmente se encuentra en los textos actuales de segunda enseñanza de Estados Unidos: *Por un punto dado no situado sobre una recta sólo puede trazarse otra paralela a ella.** Algunas otras alternativas para el postulado de las paralelas que han sido propuestas o tácitamente supuestas durante años, son las siguientes: 1) *Existe un par de rectas coplanares en que todos los puntos de una se encuentran a la misma distancia de la otra.* 2) *Existe un par de triángulos no congruentes semejantes.* 3) *Si en un cuadrilátero un par de lados opuestos son iguales y si los ángulos adyacentes al tercer lado son rectos, entonces los otros dos ángulos también son rectos.* 4) *Si en un cuadrilátero tres ángulos son rectos, el cuarto también es recto.* 5) *Existe al menos un triángulo en el que la suma de sus tres ángulos es igual a dos rectos.* 6) *Por un punto situado dentro de un ángulo menor que 60° puede siempre trazarse una recta que corte a ambos lados del ángulo.* 7) *Una circunferencia puede hacerse pasar por tres puntos no colineales cualesquiera.* 8) *No hay límite superior del área de un triángulo.*

* Las proposiciones I 27 e I 28 garantizan, bajo la suposición de la infinidad de rectas, la existencia de una paralela.

Constituye una colección interesante de ejercicios para el estudiante el que trate de demostrar la equivalencia de las alternativas anteriores al postulado original enunciado por Euclides. Para demostrar la equivalencia del postulado de Euclides y una particular de las alternativas, debemos demostrar que la alternativa se deduce como un teorema de las suposiciones de Euclides, y además que el postulado de Euclides se deduce como un teorema del sistema de suposiciones de Euclides en que el postulado de las paralelas se ha sustituido por la alternativa considerada.

Los intentos para deducir el postulado de las paralelas como un teorema a partir de los nueve restantes "axiomas" y "postulados", tuvo ocupados a los geómetras por más de dos mil años, y culminó, como veremos, en algunos de los desarrollos de más largo alcance de las matemáticas modernas. Muchas "demostraciones" del postulado fueron ofrecidas, pero fue demostrado, tarde o temprano, que cada una se basaba en una suposición tácita equivalente al propio postulado.

No fue sino hasta 1733 cuando la primera investigación realmente científica del postulado de las paralelas fue publicada. En dicho año, el padre

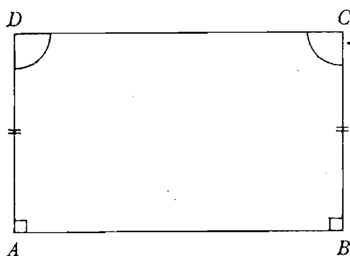


FIG. 7.1a

jesuita italiano Girolamo Saccheri (1667-1733), mientras era profesor de matemáticas de la Universidad de Pavía, publicó una pequeña obra titulada *Euclides ab omni nævo vindicatus* (Euclides liberado de toda falla). En una obra anterior sobre lógica, Saccheri había sido fascinado por el poderoso método del *reductio ad absurdum* (reducción al absurdo) y concibió la idea de aplicarlo a una investigación del postulado de las paralelas. Sin emplear el postulado de las paralelas, Saccheri demostró fácilmente, como lo puede hacer un estudiante de geometría de segunda enseñanza, que si en un cuadrilátero *ABCD* (fig. 7.1a), los ángulos *A* y *B* son rectos y los lados *AD* y *BC* son iguales, entonces los ángulos *D* y *C* son iguales. Hay, pues, tres posibilidades: los ángulos *D* y *C* son ángulos agudos iguales, ángulos rectos iguales o ángulos obtusos iguales. Estas tres posibilidades fueron denominadas por Saccheri la *hipótesis del ángulo agudo*, la *hipótesis del*

ángulo recto y la *hipótesis del ángulo obtuso*. Su plan del trabajo era demostrar que la suposición de una u otra de las hipótesis del ángulo agudo o del ángulo obtuso conduciría a una contradicción. Entonces, por *reducción al absurdo,* la hipótesis del ángulo recto tenía que verificarse y esta hipótesis, lo demostró Saccheri, llevaba consigo una demostración del postulado de las paralelas. Suponiendo tácitamente, como lo hizo en realidad Euclides, la infinidad de la recta, Saccheri eliminó fácilmente la hipótesis del ángulo obtuso, pero vio que en el caso de la hipótesis del ángulo agudo esto era mucho más difícil. Después de obtener concienzudamente muchos de los teoremas, ahora clásicos, de la llamada geometría no euclidiana, Saccheri imperfectamente obligó a que entrara en su desarrollo una contradicción no convincente en la que intervenían nociones confusas sobre elementos infinitos. Si no le hubiera parecido tan vehementemente que había una contradicción en esta última hipótesis, sino que, en lugar de ello, hubiese admitido su incapacidad para hallar una, indudablemente se le hubiera acreditado el descubrimiento de la geometría no euclidiana. Parece que poco después de la publicación de la pequeña obra de Saccheri se retiró repentinamente del mercado, con el resultado de que los esfuerzos de Saccheri tuvieron poco efecto en sus contemporáneos.

Treinta y tres años después de la publicación de Saccheri, Johann Heinrich Lambert (1728-1777), de Alemania, escribió una investigación semejante titulada *Die Theorie der Parallellinien,* que, sin embargo, no se publicó sino hasta once años después de su muerte. Lambert eligió un cuadrilátero que contenía tres ángulos rectos (la mitad de un cuadrilátero de Saccheri) como su figura fundamental, y consideró tres hipótesis según que el cuarto ángulo fuera agudo, recto u obtuso. Fue considerablemente más lejos que Saccheri al deducir proposiciones bajo la hipótesis de los ángulos agudo y obtuso. Por consiguiente, con Saccheri, demostró que en las tres hipótesis, la suma de los ángulos de un triángulo es menor, igual o mayor que dos ángulos rectos, respectivamente, y luego, además, que la deficiencia por debajo de los dos ángulos rectos, en la hipótesis del ángulo agudo, o el exceso por encima de dos ángulos rectos, en la hipótesis del ángulo obtuso, es proporcional al área del triángulo. Observó la semejanza de la geometría que sigue la hipótesis del ángulo obtuso a la geometría esférica, donde el área del triángulo es proporcional a su exceso esférico, y conjeturó que la geometría que seguía la hipótesis del ángulo agudo podía tal vez verificarse sobre una esfera de radio imaginario. La hipótesis del ángulo obtuso se eliminó haciendo la misma suposición tácita que hizo Saccheri, pero sus conclusiones con respecto a la hipótesis del ángulo agudo fueron indefinidas y no satisfactorias, lo que, realmente, fue el motivo de que su trabajo nunca fuera publicado durante su vida.

Un tercer esfuerzo distinguido para establecer el postulado de las paralelas de Euclides por el método de *reducción al absurdo* fue ensayado, durante un largo período de años, por el eminente analista ítalo-francés Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Empezó de nuevo y consideró tres hipótesis, según que la suma de los ángulos de un triángulo sea menor, igual o mayor que dos ángulos rectos. Suponiendo tácitamente la infinidad de una recta, pudo eliminar la tercera hipótesis; pero aunque hizo repetidos intentos no pudo desechar la primera hipótesis. Estos diversos intentos aparecieron en las ediciones sucesivas de su muy popular *Eléments de géométrie,** que tuvo desde una primera edición en 1794 hasta una decimosegunda en 1823. Legendre tal vez conserva el récord de persistencia en intentar demostrar el famoso postulado. El estilo simple y directo de sus demostraciones, que se difundió mucho debido a su aparición en sus *Eléments,* y su alta eminencia en el mundo de las matemáticas, creó un marcado interés popular en el problema del postulado de las paralelas.

No es de extrañar que no se haya encontrado ninguna contradicción en la hipótesis del ángulo agudo, pues, como se demostró posteriormente, se sabe ahora que la geometría desarrollada con esta hipótesis es tan compatible como la euclidiana; esto es, el postulado de las paralelas es independiente del resto de los postulados y no puede deducirse de ellos. Por supuesto, hay teoremas de la nueva geometría que contradicen los teoremas de la euclidiana, pero evidentemente no hay dos teoremas de la nueva geometría que se contradigan. Los primeros en sospechar este hecho fueron Karl Friedrich Gauss (1777-1855) de Alemania, János Bolyai (1802-1860) de Hungría y Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856) de Rusia. Estos plantearon el tema en la forma de Playfair del postulado de las paralelas, considerando tres posibilidades: por un punto dado que no esté en una recta pueden trazarse *más de una,* o *únicamente una,* o *ninguna* paralela a otra dada. Estas situaciones son equivalentes, respectivamente, a la hipótesis de los ángulos agudo, recto u obtuso. Nuevamente, suponiendo la infinidad de una recta, el tercer caso fue fácilmente eliminado. Imaginando, al mismo tiempo, una geometría compatible con la primera posibilidad, estos tres matemáticos realizaron independientemente extensos desarrollos geométricos y trigonométricos de la hipótesis del ángulo agudo.

* Este trabajo es una mejora pedagógica que se intentó de los *Elementos* de Euclides hecha al reordenar considerablemente y simplificar las proposiciones. El trabajo ganó muchas consideraciones en Europa continental y fue recibido tan favorablemente en los Estados Unidos de América que se convirtió en el prototipo de los textos de geometría elemental de este país. La primera traducción al inglés fue hecha en los Estados Unidos de América en 1819 por John Farrar, de la Universidad de Harvard. La siguiente traducción al inglés fue hecha en 1824 por el famoso literato escocés Thomas Carlyle, quien en sus primeros años fue profesor de matemáticas. La traducción de Carlyle tuvo 33 ediciones americanas.

Gauss fue, sin duda alguna, el primero en alcanzar conclusiones penetrantes referentes a la hipótesis del ángulo agudo, pero como durante su vida no publicó nada sobre el tema, el honor del descubrimiento de esta geometría no euclidiana particular debe compartirse con Bolyai y Lobachevsky. Bolyai publicó sus hallazgos en 1832 en un apéndice a una obra matemática de su padre. Posteriormente se supo que Lobachevsky, separado del resto del mundo científico por las barreras de la distancia y el lenguaje, había publicado hallazgos semejantes en 1829-1830. Debido a la prioridad de Lobachevsky en la publicación, la geometría de la hipótesis del ángulo agudo se ha dado en llamar *geometría lobachevsquiana.*

La independencia real del postulado de las paralelas de los demás postulados de la geometría euclidiana no fue incuestionablemente establecida sino hasta que fueron proporcionadas las demostraciones de compatibilidad de la hipótesis del ángulo agudo. Estas no tardaron en llegar y fueron realizadas por Eugenio Beltrami, Arthur Cayley, Felix Klein, Henri Poincaré y otros. El método consistió en crear un modelo dentro de la geometría euclidiana de modo que al desarrollo abstracto de la hipótesis del ángulo agudo se pudiera dar una interpretación euclidiana en el modelo. Entonces, cualquier incompatibilidad en la geometría no euclidiana implicaría una incompatibilidad correspondiente en la geometría euclidiana. Consideraremos dicho modelo, debido a Poincaré, en el siguiente capítulo.

En la famosa conferencia de su tesis de graduación de 1854, Bernhard Riemann (1826-1866) demostró que si se descarta la infinidad de una recta y simplemente se admite que es indefinida, entonces, con algunos otros ligeros ajustes de los postulados restantes, se podría desarrollar otra geometría no euclidiana compatible con la hipótesis del ángulo obtuso. El trabajo de Riemann inauguró un segundo período en el desarrollo de la geometría no euclidiana, período caracterizado por el empleo de los métodos de la geometría diferencial, en lugar de los métodos antes utilizados de la geometría sintética elemental. A este trabajo debemos una considerable generalización del concepto del espacio que ha conducido, en épocas más recientes, a la teoría extensa e importante de los espacios abstractos; parte de esta teoría ha encontrado aplicación en la teoría física de la relatividad.

Después del descubrimiento de las dos geometrías no euclidianas que resultaron de las hipótesis de los ángulos agudo y obtuso, se han inventado otras geometrías no euclidianas. Cualquier geometría cuya base postulacional contradiga algún postulado de la euclidiana puede, con todo derecho, llamarse geometría no euclidiana. Realmente, Riemann fue el originador de una clase completa de geometrías no euclidianas. Estas han recibido un estudio intensivo en épocas recientes y generalmente se llaman *geometrías riemannianas.* Otra geometría no euclidiana es la ideada por Max Dehn, en

la cual se suprime el postulado de Arquímedes; dicha geometría se llama más frecuentemente *geometría no arquimediana*. La invención de estas nuevas geometrías no sólo liberó a la geometría de su tradicional molde euclidiano, sino que, como veremos en el siguiente capítulo, modificó considerablemente los conceptos anteriores de las matemáticas en general y condujo a un estudio profundo de los fundamentos de esta materia y a un desarrollo más amplio del método axiomático.

Las consecuencias deductivas de la base postulacional euclidiana con el postulado de las paralelas suprimido constituyen lo que se llama *geometría absoluta;* contiene las proposiciones que son comunes a las geometrías euclidiana y lobachevsquiana. Entre estas proposiciones comunes se encuentran las primeras 28 proposiciones del libro I de Euclides. El lector observará que en el Apéndice I, donde se dan las cuarenta y ocho proposiciones del primer libro de los *Elementos* de Euclides, las primeras veintiocho están separadas, por conveniencia, de las veinte restantes. Cuando se trabaja en la geometría lobachevsquiana, el estudiante puede recurrir con confianza a cualquiera de estas veintiocho primeras proposiciones.

PROBLEMAS

7.1–1 Demuéstrese que el postulado de Playfair y el quinto postulado de Euclides son equivalentes. (Se puede utilizar cualquiera de las primeras veintiocho proposiciones de Euclides.)

7.1–2 Demuéstrese que cada uno de los siguientes enunciados es equivalente al postulado de Playfair:

a) Si una recta corta a una de dos paralelas, cortará también a la otra.

b) Todas las rectas que sean paralelas a la misma recta serán paralelas entre sí.

7.1–3 Demuéstrese que el postulado de Playfair y el enunciado "La suma de los ángulos de un triángulo es siempre igual a dos rectos", son equivalentes.

7.1–4 Hállese el sofisma de la siguiente "demostración", dada por B. F. Thibaut (1809) del quinto postulado de Euclides: Colóquese una regla con su borde coincidiendo con el lado *CA* de un triángulo *ABC*. Gírese la regla sucesivamente alrededor de los tres vértices, *A*, *B* y *C*, en el sentido *ABC*, de modo que coincida en cada giro con *AB*, *BC* y *CA*. Cuando la regla vuelva a su posición original, habrá girado cuatro ángulos rectos. Pero toda la rotación está formada por tres rotaciones iguales a los ángulos exteriores del triángulo. Se deduce entonces que la suma de los ángulos del

triángulo debe ser igual a dos ángulos rectos, y de esto se desprende el postulado de las paralelas de Euclides.

7.1–5 Hállese el sofisma de la siguiente "demostración", dada por J. D. Gergonne (1812), del quinto postulado de Euclides: Sean PA y QB, que están en el mismo plano y al mismo lado de PQ, perpendiculares a PQ. Entonces PA y QB son paralelas. Sea PG el último rayo, que pasando por P y quedando dentro del ángulo QPA, corte QB. Prolónguese QB hasta un punto K más allá del punto de intersección de PG con QB, y trácese PK. Se deduce que PG *no* es el último rayo que pasando por P corte a QB y que, por tanto, todos los rayos que pasan por P y que están dentro del ángulo QPA tienen que encontrar a QB. En consecuencia, por el punto P sólo hay una recta paralela a la QB, y se desprende el quinto postulado de Euclides.

7.1–6 Hállese el sofisma de la siguiente "demostración", dada por J. K. F. Hauff (1819), del quinto postulado de Euclides: Sean AD, BE, CF las alturas de un triángulo equilátero, ABC, y sea O el punto de concurrencia de estas alturas. En el triángulo rectángulo ADC, el ángulo agudo CAD es igual a la mitad del ángulo agudo ACD. Por tanto, en el triángulo rectángulo AEO, el ángulo agudo OAE es igual a la mitad del agudo AOE. Se verifica un razonamiento semejante para cada uno de los seis pequeños triángulos rectángulos del cual AEO es típico. Se deduce ahora que la suma de los ángulos del triángulo ABC es igual a la mitad de la suma de los ángulos formados alrededor de O, esto es, igual a dos rectos. Pero se sabe que la existencia de un solo triángulo cuya suma de sus ángulos sea igual a dos rectos es suficiente para garantizar el quinto postulado de Euclides.

7.1–7 Demuéstrese que las proposiciones I 27 e I 28 garantizan, con la suposición de la infinidad de las rectas, la existencia de por lo menos *una* recta que pase por un punto dado y sea paralela a una recta dada que no pase por dicho punto.

7.1–8 Demuestren, por simples teoremas de congruencia (que no requieran el postulado de las paralelas), los siguientes teoremas respecto a los cuadriláteros de Saccheri:

a) Los ángulos en la cima de un cuadrilátero de Saccheri son iguales entre sí.

b) La recta que une los puntos medios de la base y la cima de un cuadrilátero de Saccheri es perpendicular tanto a la base como a la cima.

c) Si desde los extremos de la base de un triángulo se trazan perpendiculares a la recta que pasa por los puntos medios de los otros dos lados, se forma un cuadrilátero de Saccheri.

d) La recta que une los puntos medios de los lados iguales de un

cuadrilátero de Saccheri es perpendicular a la recta que une los puntos medios de la base y la cima.

7.1–9 Demuéstrese que un cuadrilátero de Lambert puede considerarse como la mitad de un cuadrilátero de Saccheri.

7.1–10 Un *grado esférico* de una esfera dada se define por una área esférica igual a (1/720) de la superficie completa de la esfera. El *exceso esférico* de un triángulo esférico se define por el exceso, medido en grados de ángulo, de la suma de los ángulos del triángulo por encima de 180°.

a) Demuéstrese que el área de un huso esférico o lúnula cuyo ángulo es $n°$ es igual a $2n$ grados esféricos.

b) Demuéstrese que el área de un triángulo esférico, en grados esféricos, es igual al exceso esférico del triángulo.

c) Demuéstrese que el área A de un triángulo esférico de exceso esférico $E°$ está dado por

$$A = \pi r^2 E°/180°,$$

donde r es el radio de la esfera. Esto demuestra que, para una esfera dada, el área de un triángulo esférico es proporcional a su exceso esférico.

7.1–11 Complétense los detalles de la siguiente demostración del *primer teorema de Legendre:* "La suma de los tres ángulos de un triángulo no puede ser mayor que dos rectos". Compruébese que la demostración supone la infinidad de una recta.

Supongamos que la suma de los ángulos de un triángulo ABC es $180° + \theta$, y que el ángulo CAB no es mayor que ninguno de los demás. Unase A con D, el punto medio de BC, y prolónguese AD, en su propia longitud, hasta E. Demuéstrese que los triángulos BDA y CDE son congruentes y, en consecuencia, que la suma de los ángulos de un triángulo AEC también es igual a $180° + \theta$. Uno de los ángulos CAE y CEA no es mayor que $\frac{1}{2} \sphericalangle CAB$. Aplíquese el mismo procedimiento al triángulo AEC, obteniendo un tercer triángulo cuya suma de los ángulos es $180° + \theta$ y uno de cuyos ángulos no es mayor que $(\frac{1}{2})^2 \sphericalangle CAB$. Aplicando la construcción n veces, se llega a un triángulo cuya suma de los ángulos es $180° + \theta$ y uno de cuyos ángulos no es mayor que $(\frac{1}{2})^n \sphericalangle CAB$. Pero (por el postulado de Arquímedes) existe un entero k tal que $k\theta > \sphericalangle CAB$. Elíjase n tan grande que $2^n > k$. Entonces $\theta > (\frac{1}{2})^n \sphericalangle CAB$, y la suma de dos de los ángulos del último triángulo tiene que ser mayor que 180°. Pero esta conclusión contradice la proposición I 17.

7.1–12 En un esfuerzo para eliminar la hipótesis del ángulo agudo, Legendre trató de obtener, con esta hipótesis, un triángulo que contuviera a un triángulo dado al menos dos veces. Procedió en la forma siguiente: Sea ABC un triángulo tal que el ángulo A no sea mayor que ninguno de

los otros dos. Constrúyase sobre el lado BC un triángulo BCD congruente al ABC, con el ángulo DCB igual al B, el ángulo DBC igual al C, y con D al lado de BC opuesto al que está A. Por D trácese una recta que corte a AB y AC prolongadas en E y F, respectivamente. Entonces, el triángulo AEF contiene el ABC al menos dos veces.

a) Demuéstrese que esta construcción admite que por un punto que está dentro de un ángulo dado menor que 60° puede siempre trazarse una recta que corte a los dos lados del ángulo. (Esto, hemos visto que equivale al quinto postulado.)

b) Si la construcción anterior hubiese sido independiente del quinto postulado, ¿cómo podría haber eliminado la hipótesis del ángulo agudo?

7.1–13 Considerando el primer teorema de Legendre (véase el problema 7.1–11), demuéstrese la siguiente sucesión de teoremas acreditados a Legendre.

a) Si la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos, entonces se verifica lo mismo para cualquier triángulo obtenido del dado trazando una ceviana que pase por uno de sus vértices.

b) Si existe un triángulo con la suma de sus ángulos igual a dos rectos, entonces se puede construir un triángulo rectángulo isósceles cuya suma de sus ángulos sea igual a dos rectos y sus catetos mayores en longitud que cualquier segmento de recta dado.

c) *Segundo teorema de Legendre.* Si existe un solo triángulo cuya suma de sus ángulos sea igual a dos rectos, entonces la suma de los ángulos de todo triángulo será igual a dos rectos.

d) Si existe un solo triángulo cuya suma de sus ángulos sea menor que dos rectos, entonces la suma de los ángulos de todo triángulo será menor que dos rectos.

7.1–14 Demuéstrese que la suposición de la existencia de triángulos semejantes no congruentes es equivalente al quinto postulado.

7.1–15 Demuéstrese que la suposición de la existencia de un par de rectas en que todo punto de una cualquiera se encuentre a igual distancia de la otra, es equivalente al quinto postulado.

7.2 Geometría plana lobachevsquiana; paralelas e hiperparalelas. En este artículo y en los dos siguientes desarrollaremos parte de la geometría del plano lobachevsquiano. Como se dijo al final del artículo anterior, se hará uso libre de las primeras veintiocho proposiciones de los *Elementos* de Euclides. Estas veintiocho proposiciones son independientes del postulado de las paralelas y, por tanto, se verifican en la geometría lobachevsquiana igual que en la euclidiana. El lector hallará estas proposiciones en el Apéndice.

En lugar del postulado de las paralelas de Euclides haremos la siguiente suposición:

7.2.1 El postulado de las paralelas lobachevsquiano. *Si* P *es un punto que no está en la recta* AB (fig. 7.2a) *y si* Q *es el pie de la perpendicular desde* P *hasta* AB, *hay desde* P *dos rayos,* PX, PY, *que no coinciden en la misma recta y no cortan a* AB, *y tales que cualquier rayo* PZ *desde* P *y que quede dentro del* ∢XPY *que contiene a* PQ, *cortará a* AB.*

Procedemos ahora con el desarrollo.

7.2.2 Teorema. *En la figura 7.2a, cualquier recta que pase por* P *y que no quede dentro de* ∢XPY *que contiene a* PQ, *no cortará a la recta* AB.

Pues si dicha recta cortara a la *AB*, entonces el rayo *PX* o el *PY* tendría que cortar a la recta *AB*.

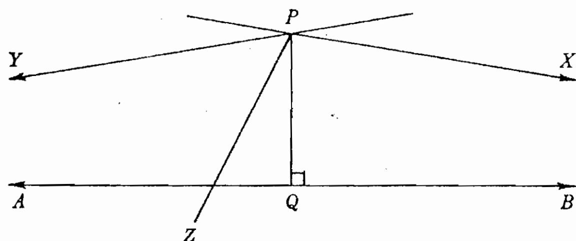


Fig. 7.2a

7.2.3 Definiciones. Llamaremos a las rectas *PX* y *PY*, de la figura 7.2a, las *paralelas* a la recta *AB* que pasan por *P*. La recta dirigida $\overline{PX}$ se dice que es *paralela* a la recta dirigida $\overline{AB}$, y $\overline{PY}$ se dice que es *paralela* a $\overline{BA}$. Las rectas que pasan por *P* y que no quedan dentro del ∢*XPY* que contiene a *PQ*, se llamarán *hiperparalelas* a la recta *AB* que pasan por *P*.

7.2.4 Teorema. *Si* Q *es el pie de la perpendicular desde el punto* P *a la recta* AB *y si* PX *y* PY *son paralelas a la recta* AB *que pasan por* P, *entonces los ángulos* XPQ *y* YPQ *son ángulos agudos iguales.*

Supongamos que ∢*YPQ* > ∢*XPQ*. Tómese (fig. 7.2b) el ∢*MPQ* = ∢*XPQ*. Entonces, *PM* queda dentro del ∢*YPQ*, y, por tanto, deberá cortar a la recta *AB* en un punto *N*. Tómese sobre *AB*, en el lado de *Q* opuesto al que está *N*, *QK* = *QN*, y trácese *PK*. Entonces, los triángulos *NPQ* y *KPQ* son congruentes (por I 4) y ∢*KPQ* = ∢*MPQ* = ∢*XPQ*. Por tanto, *PX*

* Por conveniencia para nuestro breve tratamiento hemos elegido una forma más concentrada del postulado lobachevsquiano de las paralelas, de lo que realmente se necesita.

y PK coinciden. Pero esto es imposible, porque PX no corta a AB. En consecuencia, $\sphericalangle YPQ \ngtr \sphericalangle XPQ$. Análogamente podemos demostrar que $\sphericalangle XPQ \ngtr \sphericalangle YPQ$. Se deduce que $\sphericalangle YPQ = \sphericalangle XPQ$.

Ahora bien, los ángulos YPQ y XPQ no son rectos, pues si lo fueran, entonces PY y PX estarían en la misma recta, lo cual no sucede. Los ángulos YPQ y XPQ no son obtusos, porque si lo fueran, la recta SPR que pasa

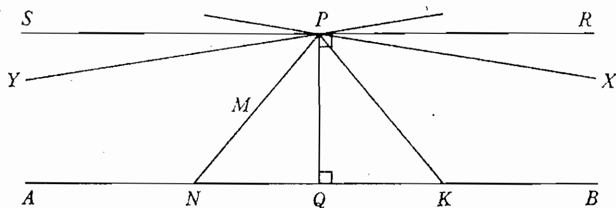


FIG. 7.2b

por P y es perpendicular a PQ quedaría dentro del $\sphericalangle XPY$ que contiene a PQ y, por tanto, tendría que cortar a la recta AB, lo cual no sucede (por I 28). Se deduce que los ángulos YPQ y XPQ son agudos.

7.2.5 COROLARIO. *Hay una infinidad de hiperparalelas a la recta* AB *que pasan por un punto* P *que no está en* AB.

7.2.6 DEFINICIÓN. El ángulo XPQ (o el YPQ) de la figura 7.2b se llama *ángulo de paralelismo* en P para la recta AB.

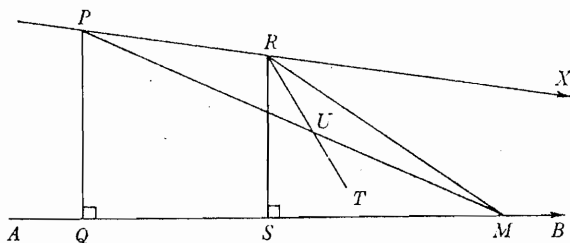


FIG. 7.2c

7.2.7 TEOREMA. *Si* $\overline{PX}$ *es paralela a* $\overline{AB}$ *y* R *es un punto de* PX *tal que* P *y* R *están del mismo lado de* X, *entonces* $\overline{RX}$ *es paralela a* $\overline{AB}$. (Esta se llama *propiedad de transmisibilidad* del paralelismo.)

Caso 1 (R entre P y X): trácense PQ y RS (fig. 7.2.c) perpendiculares a AB. Sea RT un rayo trazado desde R y que quede dentro del $\sphericalangle SRX$. Tómese un punto U en el rayo RT del mismo lado de AB que P. Trácese PU. Entonces, PU tiene que cortar a AB en un punto M. Se deduce que RU debe cortar a SM, y $\overline{RX}$ es paralela a $\overline{AB}$.

Caso 2 (P entre R y X) : La demostración es la misma que la del caso 1, aparte de que tomamos para U un punto cualquiera en la prolongación hacia atrás del rayo RT (fig. 7.2d).

7.2.8 Teorema. *Si* $\overline{CD}$ *es paralela a* $\overline{AB}$, *entonces* $\overline{AB}$ *es paralela a* $\overline{CD}$. (Esta se llama propiedad de simetría del paralelismo.)

Fig. 7.2d

Considerando la figura 7.2e, tómese P, un punto de CD, y trácese PQ perpendicular a AB y QR perpendicular a CD. Por I 16 se deduce que R debe estar en el rayo PD. Sea QE un rayo cualquiera que pase por Q y quede dentro del $\sphericalangle RQB$. Trácese PF perpendicular a la recta QE. Entonces, nuevamente por I 16, F está en el rayo QE. Sobre PQ tómese $PG = PF$. Por I 18, G está entre P y Q. Trácese GH perpendicular a PQ. Constrúyase el $\sphericalangle GPI = \sphericalangle FPD$ y prolónguese PI tal que corte a AB en J. Como GH corta al lado PQ del triángulo PQJ, pero no corta (por I 28) al lado QJ, debe cortar al lado PJ en algún punto, K. Sobre PD tómese $PL = PK$ y trácese FL. Como los triángulos PGK y PFL son congruentes (por I 4), se deduce que el $\sphericalangle PFL$ es recto. Pero $\sphericalangle PFE$ es un ángulo recto. En consecuencia, QE cae sobre FL y, por tanto, corta a PD en L. Se deduce ahora que $\overline{AB}$ es paralela a $\overline{CD}$. (Esta demostración se debe a Lobachevsky.)

Fig. 7.2e

7.2.9 Teorema. *Si* $\overline{AB}$ *y* $\overline{CD}$ *son paralelas a* $\overline{EF}$, *entonces* $\overline{AB}$ *es paralela a* $\overline{CD}$. (Esta se llama *propiedad de transitividad* del paralelismo.)

Caso 1. (EF entre AB y CD): Considerando la figura 7.2f, únase un punto A' de AB con uno C' de CD y sea $A'H$ un rayo que pase por A' y quede dentro del $\sphericalangle C'A'B'$. Como $\overline{AB}$ es paralela *a* $\overline{EF}$, $A'H$ corta a EF

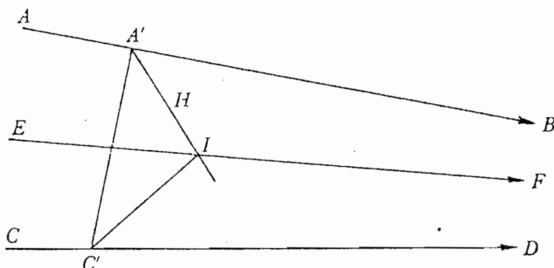


Fig. 7.2.f

en un punto I. Trácese $C'I$. Como $\overline{EF}$ es paralela a $\overline{CD}$, $A'I$ prolongada debe cortar a CD. Como AB no corta a CD (y si la cortara, tendría que cortar a EF), pero todo rayo $A'H$ que quede dentro del $\sphericalangle C'A'B'$ corta a CD, se deduce que $\overline{AB}$ es paralela a $\overline{CD}$.

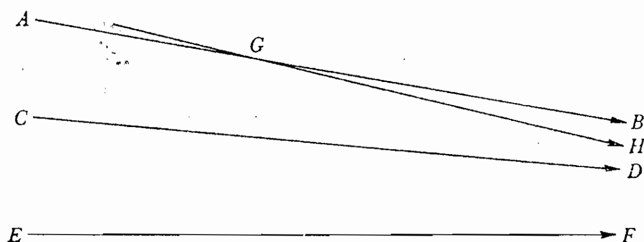


Fig. 7.2g

Caso 2. (AB y CD en el mismo lado de EF): Considerando la figura 7.2g, sea $\overline{GH}$ la paralela a $\overline{CD}$ que pasa por el punto G de AB. Entonces, por el caso 1, $\overline{GH}$ es paralela a $\overline{EF}$. Se deduce que AB coincide con GH y, por tanto, $\overline{AB}$ es paralela a $\overline{CD}$. (Esta demostración se debe a Gauss.)

7.2.10 Definiciones. Una figura (fig. 7.2h) formada por dos rayos paralelos y un segmento rectilíneo que una los orígenes de los rayos se llama *triángulo límite*. Dicho segmento que une los orígenes se llama *lado finito* del triángulo límite, y los ángulos en sus extremos se llaman *ángulos* del triángulo límite.

7.2.11 Teorema. *Un ángulo exterior de un triángulo límite es mayor que el ángulo interior opuesto.*

Supongamos (fig. 7.2i) que $\sphericalangle CAX < \sphericalangle CBY$. Tómese el $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBY$. Entonces, AD quedará dentro del $\sphericalangle BAX$ y, por tanto, deberá cortar a BY en cierto punto E. Entonces, en el triángulo ABE, el ángulo exterior, CAE, es igual al ángulo interior opuesto, ABE. Pero esto contradice I 16. Se deduce que $\sphericalangle CAX \not< \sphericalangle CBY$.

Supongamos (fig. 7.2j) que $\sphericalangle CAX = \sphericalangle CBY$. Sea L el punto medio de AB. Trácese NLM perpendicular a AX. Entonces, los triángulos LAM y

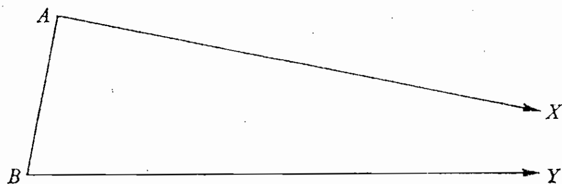


Fig. 7.2h

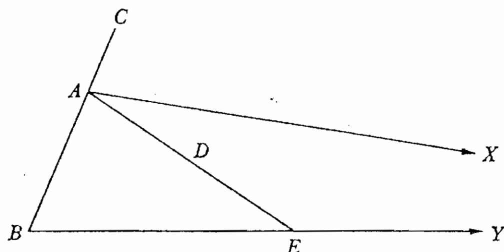


Fig. 7.2i

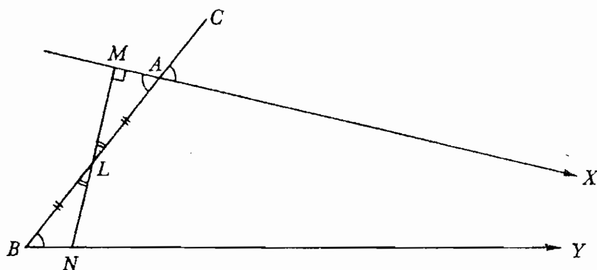


Fig. 7.2j

LBN son congruentes (por I 26). Se deduce que $\sphericalangle BNL = \sphericalangle AML =$ un ángulo recto. Entonces $\sphericalangle AML$ es el ángulo de paralelismo en M para la recta BY. Pero esto es imposible, pues un ángulo de paralelismo es agudo. Se deduce que $\sphericalangle CAX \neq \sphericalangle CBY$.

Concluimos ahora que $\sphericalangle CAX > \sphericalangle CBY$, y el teorema se ha establecido.

7.2.12 Teorema. *Si, en dos triángulos límites, los lados finitos son iguales y un ángulo de uno es igual a un ángulo del otro, entonces los dos ángulos restantes son también iguales.*

Considerando la figura 7.2k, sea $AB = A'B'$ y $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$. Supongamos que $\sphericalangle B > \sphericalangle B'$. Tómese el $\sphericalangle ABC = \sphericalangle B'$. Entonces, BC debe cortar a AX en cierto punto D. Tómese sobre $A'X'$, $A'D' = AD$, y trácese $B'D'$. Entonces, los triángulos BAD y $B'A'D'$ son congruentes (por I 4), y $\sphericalangle A'B'D' = \sphericalangle ABD = \sphericalangle B'$. Pero esto es imposible. Se deduce que $\sphericalangle B \ngtr \sphericalangle B'$. Análogamente, $\sphericalangle B' \ngtr \sphericalangle B$. Esto es, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$.

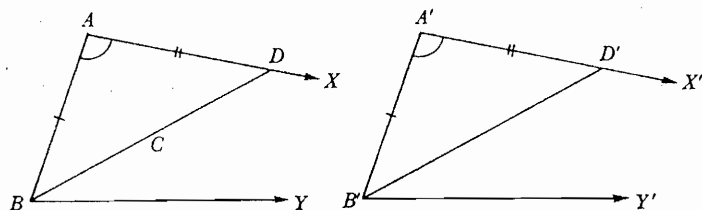


Fig. 7.2k

7.2.13 Teorema. *Si, en dos triángulos límites, los dos ángulos de uno son iguales a los dos del otro, entonces los dos lados finitos de los triángulos también son iguales.*

Considerando la figura 7.2l, supongamos que $AB > A'B'$. Tómese $AC = A'B'$ y sea $\overline{CZ}$ la paralela por C a $\overline{AX}$ y $\overline{BY}$. Por el teorema 7.2.12, $\sphericalangle ACZ = \sphericalangle B' = \sphericalangle B$. Pero esto contradice el teorema 7.2.11. Se deduce que $AB \ngtr A'B'$. Análogamente, $A'B' \ngtr AB$. Por tanto, $AB = A'B'$.

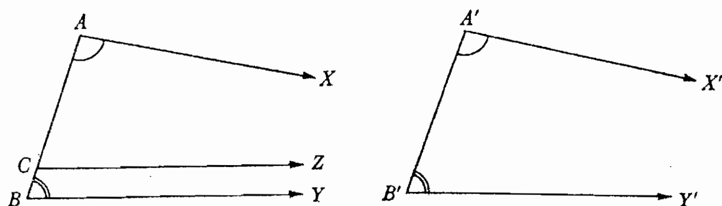


Fig. 7.2l

7.2.14 Teorema. *El ángulo de paralelismo en* P *para una recta* AB *sólo depende de la distancia,* PQ, *de* P *a* AB, *y disminuye a medida que* PQ *aumenta.*

Esto es una consecuencia inmediata de los teoremas 7.2.12 y 7.2.11.

7.2.15 Notación. Si P (fig. 7.2m) está a una distancia h de la recta AB, designaremos, siguiendo a Lobachevsky, el ángulo de paralelismo en P para la recta AB por el símbolo $\Pi(h)$.

Demostraremos posteriormente que $\Pi(h) = 2 \operatorname{arc\,tg} e^{-h}$ si se elige la unidad de longitud como la distancia correspondiente al ángulo de paralelismo $\alpha = 2 \operatorname{arc\,tg} e^{-1}$.

La relación entre la distancia h de un punto P a una recta AB y el ángulo $\Pi(h)$ de paralelismo en P para la recta AB revela una característica interesante de la geometría lobachevsquiana que no tiene la euclidiana. Tanto en la geometría euclidiana como en la lobachevsquiana, los ángulos tienen una unidad natural de medida (el ángulo recto, o cierta parte fraccionaria dada de él) que puede definirse geométricamente, y que si se perdiera podría reconstruirse geométricamente. El hecho de que exista una unidad de ángulo que tenga una conexión estructural de este tipo con la geometría se expresa por los matemáticos diciendo que los ángulos son *absolutos* en las dos geometrías. Ahora bien, en la geometría euclidiana, es evidente que las longitudes no son absolutas; no hay unidad natural de longitud estructuralmente conectada con la geometría. Las longitudes tienen que medirse en función de cierta unidad de longitud arbitrariamente elegida, y si esta unidad de longitud se destruyera no podría reconstruirse geométricamente. Los matemáticos expresan este hecho diciendo que en la geometría euclidiana las longitudes son *relativas*. La característica interesante de la geometría lobachevsquiana es que no sólo los ángulos, sino también las longitudes, son absolutos. Porque a cada ángulo $\Pi(h)$ de paralelismo se asocia una distancia definida, h, y, por tanto, se puede obtener a partir de una unidad de medida angular una unidad correspondiente de medida lineal.

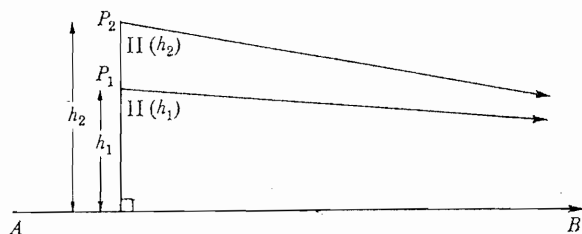


FIG. 7.2m

PROBLEMAS

7.2–1 Si PX y PY son ambas paralelas a la recta AB, demuéstrese que la bisectriz del $\sphericalangle XPY$ es perpendicular a AB.

7.2–2 Un triángulo límite se dice que es *isósceles* si sus dos ángulos son iguales. Demuéstrese que si los lados finitos de dos triángulos límites isósceles son iguales, entonces los ángulos de uno de los triángulos límites son iguales a los del otro.

7.2–3 Demuéstrese que la suma de los ángulos de un triángulo límite es siempre menor que dos rectos.

7.2–4 Demuéstrese que si una transversal corta dos rectas, haciendo que la suma de los ángulos interiores del mismo lado sea igual a dos rectos, entonces las dos rectas son hiperparalelas entre sí.

7.2–5 Se dan cuatro segmentos AC, BD, $A'C'$, $B'D'$. Si $\overline{AC}$ es paralela a $\overline{BD}$, $AB = A'B'$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, y $\sphericalangle ABD = \sphericalangle A'B'D'$, demuéstrese que $\overline{A'C'}$ es paralela a $\overline{B'D'}$.

7.2–6 Demuéstrese que la mediatriz del lado finito de un triángulo límite isósceles es paralela a los dos lados paralelos de dicho triángulo, y que cualquier punto de la mediatriz está a igual distancia de los lados paralelos del triángulo límite.

7.2–7 Si la mediatriz del lado finito de un triángulo límite es paralela a los lados paralelos de dicho triángulo, demuéstrese que el triángulo límite es isósceles.

7.2–8 Si en dos triángulos límite, un ángulo del primero es igual a uno del segundo, pero el lado finito del primero es mayor que el lado finito del segundo, demuéstrese que el otro ángulo del primero es menor que el otro ángulo del segundo.

7.2–9 **a**) Exprésese una distancia h en función de su ángulo asociado de paralelismo. **b**) Demuéstrese que a medida que h aumenta desde 0 hasta ∞, el ángulo correspondiente de paralelismo disminuye desde $90°$ hasta $0°$. **c**) Demuéstrese que, "en lo pequeño", la geometría lobachevsquiana se aproxima a la euclidiana.

7.2–10 **a**) ¿Por qué conserva la Oficina de Estándares, o normas, una unidad estándar de longitud, pero no una unidad estándar de ángulo? **b**) En la geometría esférica (esto es, la geometría sobre la superficie de una esfera dada) ¿son las longitudes absolutas o relativas?

7.3 Geometría plana lobachevsquiana; cuadriláteros de Saccheri. Continuaremos nuestro estudio de la geometría plana lobachevsquiana con un examen de algunas propiedades de los cuadriláteros de Saccheri y de ciertas consecuencias importantes de dichas propiedades.

7.3.1 Definiciones. Un cuadrilátero $ABCD$ en que $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90°$ y $AD = BC$ se llama *cuadrilátero de Saccheri*. AB se llama *base*, DC la *cima* y los ángulos D y C, ángulos *en la cima*.

7.3.2 Teorema. *Los ángulos en la cima de un cuadrilátero de Saccheri son iguales y agudos.*

Considerando la figura 7.3a, trácense las diagonales AC y BD. Como los triángulos DAB y CBA son congruentes (por I 4), tenemos $AC = BD$. Se

deduce entonces que los triángulos ADC y BCD son congruentes (por I 8), de donde $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BCD$. Para demostrar que estos ángulos son agudos, sean $\overline{CX}$ y $\overline{DY}$ las paralelas por C y D a $\overline{AB}$. Por el teorema 7.2.11, $\sphericalangle ECX > \sphericalangle EDY$. Pero, por el teorema 7.2.14, $\sphericalangle BCX = \sphericalangle ADY$. Se deduce que $\sphericalangle BCE > \sphericalangle ADE$. Pero $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BCD$. En consecuencia, el $\sphericalangle BCD$ es agudo.

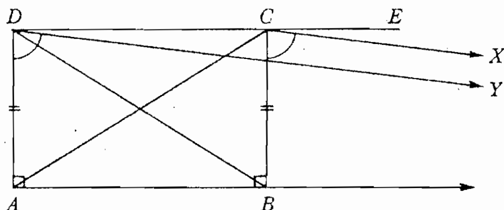


Fig. 7.3a

7.3.3 Teorema. *La recta que une los puntos medios de la base y la cima de un cuadrilátero de Saccheri es perpendicular a ambas.*

Sea M (fig. 7.3b) el punto medio de la base AB y N el punto medio de la cima, DC. Trácense MC y MD. Como los triángulos DAM y CBM son congruentes (por I 4), tenemos que $MD = MC$. Luego tenemos (por

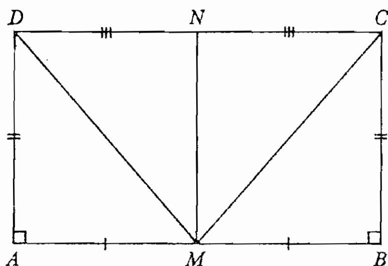


Fig. 7.3b

I 8) que el triángulo DNM es congruente a CNM, de donde $\sphericalangle DNM = \sphericalangle CNM = 90°$. Análogamente, trazando NA y NB, demostraremos que $\sphericalangle AMN = \sphericalangle BMN = 90°$.

7.3.4 Teorema. *Dos cuadriláteros de Saccheri son congruentes si tienen cimas iguales y ángulos en la cima iguales.*

Supongamos, en la figura 7.3c, que $AD > A'D'$. Tómense en DA y CB $DR = D'A'$ y $CS = C'B'$. Trácese RS. Entonces, $RSCD$ es congruente a $A'B'C'D'$. Se deduce que $\sphericalangle ARS = \sphericalangle BSR = 90°$, lo que contradice el teorema 7.3.2 cuando se aplica al cuadrilátero de Saccheri $ABSR$. Esto demuestra el teorema.

7.3.5 Teorema. *La suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos.*

Sean L, M (fig. 7.3d) los puntos medios de los lados AC y BC de un triángulo ABC. Sean AD, BE y CF las perpendiculares desde A, B, C a la recta LM. Por I 26, los triángulos ADL y CFL y los BEM y CFM son congruentes. Se deduce que $AD = CF = BE$, y $DEBA$ es un cuadrilátero de Saccheri con base DE. Por tanto, $\sphericalangle DAB$ y $\sphericalangle ABE$ son ángulos agudos. Pero $\sphericalangle \overline{DAB} = \sphericalangle \overline{DAL} + \sphericalangle \overline{LAB} = \sphericalangle \overline{FCL} + \sphericalangle \overline{LAB}$, y $\sphericalangle \overline{ABE} = \sphericalangle \overline{ABM} + \sphericalangle \overline{MBE} = \sphericalangle \overline{ABM} + \sphericalangle \overline{MCF}$. En consecuencia, $180° > \sphericalangle \overline{DAB} + \sphericalangle \overline{ABE} = \sphericalangle \overline{LAB} + \sphericalangle \overline{FCL} + \sphericalangle \overline{MCF} + \sphericalangle \overline{ABM} = \sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle B$.

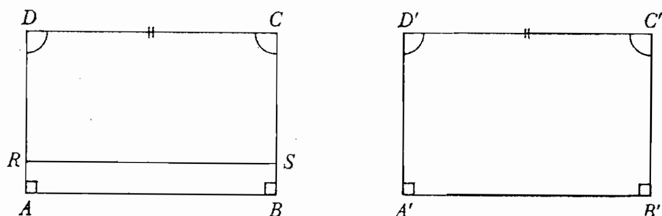


Fig. 7.3c

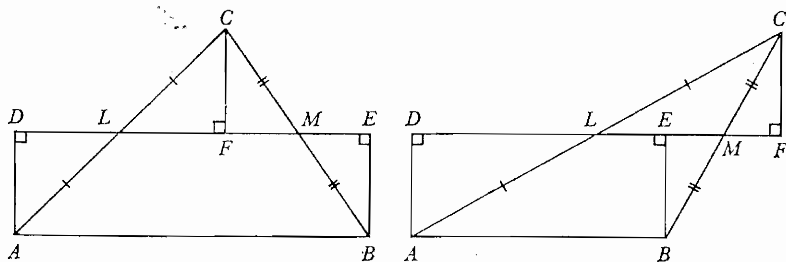


Fig. 7.3d

7.3.6 Definición. La deficiencia de la suma de los ángulos de un triángulo por debajo de dos rectos se llama *defecto* del triángulo.

7.3.7 Teorema. *Dos triángulos son congruentes si los tres ángulos de uno son iguales a los tres del otro.*

En la figura 7.3e, sean $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ y $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$, y supongamos que los triángulos no son congruentes. Entonces, $AB \neq A'B'$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $AB > A'B'$. En AB y AC tómense AD y AE iguales a $A'B'$ y $A'C'$, respectivamente. Ahora bien, E debe caer en C, en AC prolongada, o entre A y C. Si E cae en C, entonces

$A'C' = AC$ y los triángulos son congruentes (por I 26), lo que contradice nuestra suposición de que no lo son. Si E cae en AC prolongada tenemos una situación que contradice I 16. Por tanto, E tiene que caer entre A y C. Se deduce entonces que la suma de los ángulos del cuadrilátero $BCED$ es de cuatro rectos. Pero esto es imposible por el teorema 7.3.5, puesto que el cuadrilátero puede cortarse en dos triángulos. El teorema se desprende ahora.

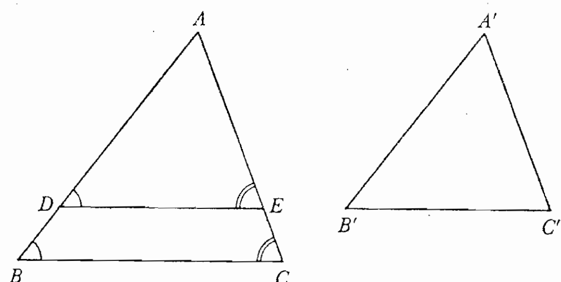


FIG. 7.3e

7.3.8 OBSERVACIÓN. El teorema 7.3.7 demuestra que en la geometría lobachevsquiana, las figuras no congruentes semejantes no pueden existir.

7.3.9 TEOREMA. *Si un triángulo se divide en dos subtriángulos por una recta ceviana, entonces, el defecto del triángulo es igual a la suma de los defectos de los dos subtriángulos.*

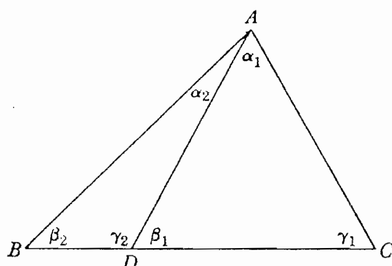


FIG. 7.3f

Considerando la figura 7.3f tenemos

$$\begin{aligned}\text{defecto } ABC &= 180° - (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_1)\\ &= 360° - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2)\\ &= [180° - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)] + [180° - (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2)]\\ &= \text{defecto } ADC + \text{defecto } ABD.\end{aligned}$$

7.3.10 TEOREMA. *Si un triángulo se diseca en subtriángulos en cualquier forma, el defecto del triángulo es igual a la suma de los defectos de los subtriángulos.*

Por cortes adicionales, la disección dada puede convertirse en una disección de cevianas (véase el teorema 5.2.9). El teorema se desprende ahora del 7.3.9.

7.3.11 TEOREMA. *Si dos triángulos,* T_1 *y* T_2*, son congruentes por adición, entonces tienen iguales defectos.*

Como $T_1 \cong T_2(+)$, se deduce que T_1 y T_2 pueden disecarse en el mismo conjunto de subtriángulos. Por consiguiente, por el teorema 7.3.10, T_1 y T_2 tienen defectos iguales.

7.3.12 LEMA. *Un triángulo es congruente por adición con un cuadrilátero de Saccheri cuya cima sea igual a un lado dado del triángulo y cada uno de cuyos ángulos en la cima sea igual a la mitad de la suma de los ángulos del triángulo.*

Designemos el triángulo por ABC y sea AB el lado dado. Sean L y M los puntos medios de los lados AC y BC, respectivamente, y sean D, E, F los pies de las perpendiculares bajadas desde A, B y C a la recta LM. Entonces, como en la demostración del teorema 7.3.5, $DEBA$ es un cuadrilátero de Saccheri con la cima AB y con cada ángulo en la cima igual a la mitad de la suma de los ángulos del triángulo. Dejamos que el lector demuestre que el triángulo ABC es congruente por adición al cuadrilátero de Saccheri $DEBA$. Hay varios casos a considerar, uno de los cuales se ilustra en la figura 7.3d.

7.3.13 TEOREMA. *Dos triángulos con un lado de uno igual a un lado del otro y que tengan defectos iguales son congruentes por adición.*

Sean los triángulos ABC y $A'B'C'$, donde $AB = A'B'$. Por el lema 7.3.12, el triángulo ABC es congruente por adición al cuadrilátero de Saccheri de cima AB y ángulos en la cima iguales cada uno a la mitad de la suma de los ángulos del triángulo ABC. Análogamente, el triángulo $A'B'C'$ es congruente por adición al cuadrilátero de Saccheri de cima $A'B'$ y ángulos en la cima iguales cada uno a la mitad de la suma de los ángulos del triángulo $A'B'C'$. Por el teorema 7.3.4, los dos cuadriláteros de Saccheri son congruentes. Se deduce (teorema 5.1.3) que el triángulo ABC es congruente por adición al $A'B'C'$.

7.3.14 TEOREMA. *La recta que pasando por el punto medio de un lado de un triángulo, es perpendicular a la mediatriz de un segundo lado, biseca al tercer lado.*

Sea E (fig. 7.3g) el punto medio del lado AC y RT la mediatriz del lado BC, de un triángulo ABC. Trácese por E la recta l perpendicular a RT y que la corte en S. Pero la recta que pasa por los puntos medios, F y E, de AB y AC es perpendicular a RT (por el teorema 7.3.3 aplicado al cuadrilátero de Saccheri, $MNCB$). Se desprende que l coincide con FE, o sea, que l biseca el lado AB.

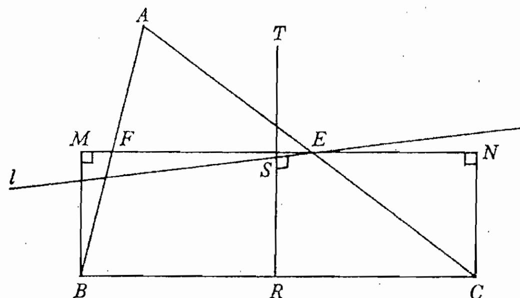


Fig. 7.3g

7.3.15 Teorema. *Dos triángulos cualesquiera con el mismo defecto son congruentes por adición.*

Sean ABC, $A'B'C'$ (fig. 7.3h) dos triángulos con el mismo defecto. Ya se ha demostrado (teorema 7.3.13) que si un lado de un triángulo es igual a un lado del otro, los dos triángulos son congruentes por adición. Supóngase, entonces, que ningún lado de uno es igual a alguno del otro; en par-

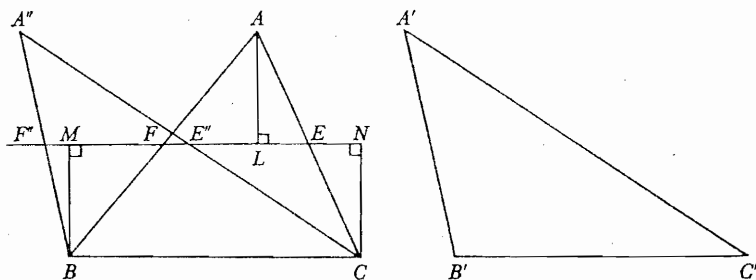


Fig. 7.3h

ticular, supongamos que $A'C' > AC$. Unanse los puntos medios F y E de AB y AC, y trácense las perpendiculares AL, BM y CN a la recta FE. Márquese en la recta FE un punto E'' tal que $CE'' = (A'C')/2$. Esto puede hacerse puesto que $(A'C')/2 > CE > CN$. Trácese CE'' y prolónguese hasta A'' de modo que $E''A'' = CE''$. Trácese $A''B$, que cortará a la recta FE en F''. Como (por el teorema 7.3.3) FE es perpendicular a la mediatriz de

BC, y pasa por el punto medio, E'', de CA'', se deduce (por el teorema 7.3.14) que F'' es el punto medio de BA''. Ahora bien, los triángulos ABC, $A''BC$ tienen la misma suma de ángulos (es decir, $\sphericalangle MBC + \sphericalangle NCB$) y un lado común BC; son, por tanto, congruentes por adición. Pero los triángulos $A''BC$ y $A'B'C'$ también tienen la misma suma de ángulos y el lado CA'' de uno es igual al lado $C'A'$ del otro; por tanto, son congruentes por adición. Luego se deduce (por el teorema 5.1.3) que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes por adición.

7.3.16 Observación. Se explica naturalmente que dos triángulos que sean congruentes por adición son de *área igual.* Podemos tomar entonces el defecto de un triángulo como la medida de su área, ya que las propiedades esenciales de una medida de área son que dos triángulos con la misma área tengan la misma medida, que dos triángulos con la misma medida tengan la misma área y que la medida de un todo sea la suma de las medidas de sus partes. En consecuencia, podemos decir, en la geometría lobachevsquiana, que el área de un triángulo es proporcional a su defecto.

PROBLEMAS

7.3–1 Demuéstrese que los teoremas 5.1.3 y 5.2.9 son de geometría absoluta.

7.3–2 Complétese la demostración del lema 7.3.12.

7.3–3 Si, en el cuadrilátero $ABCD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90°$, demuéstrese que $\sphericalangle C \lesseqqgtr \sphericalangle D$ según que $AD \lesseqqgtr BC$.

7.3–4 Un *cuadrilátero de Lambert* es un uno que tiene tres ángulos rectos.

a) Demuéstrese que el cuarto ángulo de un cuadrilátero de Lambert es agudo.

b) Demuéstrese que los lados adyacentes al cuarto ángulo de un cuadrilátero de Lambert son mayores que sus lados opuestos respectivos.

7.3–5 ¿Cuál es mayor, la base o la cima de un cuadrilátero de Saccheri?

7.3–6 Demuéstrese que dos cuadriláteros de Saccheri con bases iguales y cimas iguales son congruentes.

7.3–7 Demuéstrese que la recta que une los puntos medios de los lados iguales de un cuadrilátero de Saccheri es perpendicular a la que une los puntos medios de la base y la cima y que biseca a ambas diagonales del cuadrilátero.

7.3–8 Demuéstrese que el segmento que une los puntos medios de dos lados del triángulo es menor que la mitad del tercer lado. (Este hecho

puede utilizarse como el postulado característico de un desarrollo de la geometía lobachevsquiana.)

7.3–9 Demuéstrese que al menos dos ángulos de todo triángulo son agudos.

7.3–10 Demuéstrese que la suma de los ángulos de un polígono convexo de n lados es menor que $n - 2$ rectos.

7.4 Geometría plana lobachevsquiana; puntos ideales y ultraideales. Hemos visto, en la geometría euclidiana plana, la conveniencia de introducir ciertos puntos ideales, los llamados *puntos en el infinito.* Por este artificio, muchos teoremas que primeramente tenían excepciones se vuelven universalmente verdaderos. Una situación semejante, pero más complicada, existe en la geometría lobachevsquiana plana. Mientras que en la geometría euclidiana plana tenemos sólo dos tipos de pares de rectas, es decir, aquellos cuyas rectas se cortan, y aquellos en que éstas son paralelas, en la geometría plana lobachevsquiana tenemos tres tipos de pares de rectas, en que éstas se cortan, en que son paralelas y en que son hiperparalelas. Para proscribir los casos de excepción en ciertos teoremas de la geometría lobachevsquiana plana, tenemos que tratar de introducir una clase de puntos ficticios en que diremos que los pares de rectas paralelas se cortan, y otra clase de puntos ficticios en que diremos que los pares de rectas hiperparale-

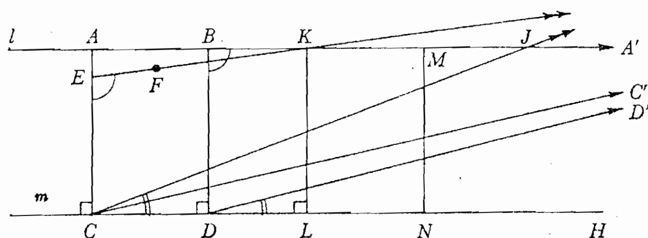


FIG. 7.4a

las se cortan. Estas dos clases de puntos ficticios se conocen como puntos *ideales* y puntos *ultraideales,* respectivamente. Debemos establecer primero un teorema importante relativo a pares de rectas hiperparalelas. La demostración que damos se debe a David Hilbert (1862-1943), uno de los matemáticos mundiales más famosos durante la primera mitad del siglo veinte.

7.4.1 TEOREMA. *Dos rectas hiperparalelas tienen una y sólo una perpendicular común.*

Con referencia a la figura 7.4a, sean l y m un par de rectas hiperparalelas. Selecciónense dos puntos A y B en l y trácense las perpendiculares AC

y BD sobre m. Si $AC = BD$, entonces $CDBA$ es un cuadrilátero de Saccheri, y la recta que une los puntos medios de AB y CD será perpendicular tanto a l como a m (por el teorema 7.3.3).

Supongamos que $AC \neq BD$ y admitamos, sin perder generalidad, que $AC > BD$. En CA tómese $CE = DB$. En E trácese EF en el lado de AC en que está BD y de modo que $\sphericalangle CEF = \sphericalangle DBA'$, donde A' está en l sobre el lado de B opuesto al de A.

Ahora demostraremos que EF, si se prolonga suficientemente, cortará a l en un punto K. Para hacerlo, considérense los rayos $\overline{CC'}$ y $\overline{DD'}$ paralelos a $\overline{AA'}$. Estos rayos tienen que quedar dentro de los ángulos ACH y BDH, respectivamente, siendo H un punto de m en el lado de D opuesto a C. Como $\sphericalangle HDD' > \sphericalangle HCC'$ (por el teorema 7.2.11), una recta CJ trazada de modo que $\sphericalangle JCH = \sphericalangle D'DH$ deberá cortar a l en un punto J. Ahora la figura $FECJ$ es congruente a la $A'BDD'$, de donde $\overline{EF}$ será paralela a $\overline{CJ}$, y EF habrá de cortar a l en algún punto K entre A y J.

Trácese KL perpendicular a m. En l y m, del lado de BD opuesto a AC, tómense $BM = EK$ y $DN = CL$; trácese MN. Trazando CK y DM podemos demostrar fácilmente que el triángulo KEC es congruente al MBN (por I 4), y luego que el triángulo KCL es congruente al MDN (por I 4), de donde $\sphericalangle DNM = \sphericalangle CLK = 90°$ y $MN = KL$. Por tanto, $LNMK$ es un cuadrilátero de Saccheri y la recta que une los puntos medios de KM y LN es perpendicular tanto a l como a m.

Hemos demostrado que l y m tienen una perpendicular común. No pueden tener dos perpendiculares comunes, pues en el caso de que las tuvieran, resultaría un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos, lo que es imposible.

7.4.2 Observación. Debe observarse que el razonamiento anterior no sólo prueba la existencia de una perpendicular común única a l y m, sino que además proporciona un método para construir esta perpendicular común. Hay muchos problemas de construcción interesantes en la geometría lobachevsquiana que de ninguna manera son evidentes. El lector podría tratar de, por ejemplo, construir: 1) las paralelas a una recta dada que pasan por un punto dado, 2) la paralela común de dos rectas que se cortan. Las soluciones a estos problemas nos permitirán construir $\Pi(h)$ dada h, y h, dada $\Pi(h)$.

7.4.3 Definiciones y notación. Asignamos a cada familia de rayos paralelos un *punto ideal* común. Asignamos a cada familia de rectas hiperparalelas todas perpendiculares a una recta común, un *punto ultraideal común*. En general, designaremos los puntos ideales y ultraideales por letras griegas mayúsculas, poniendo frecuentemente en el segundo caso un sub-

índice con el objeto de indicar la recta perpendicular común asociada (fig. 7.4b).

Si trazamos las tres mediatrices de los lados de un triángulo ordinario, los pares de estas mediatrices pueden ser rectas que se cortan, rectas paralelas o rectas hiperparalelas. Sin la convención de los puntos ideales y ultraideales, no podremos decir, entonces, que las tres mediatrices de los lados

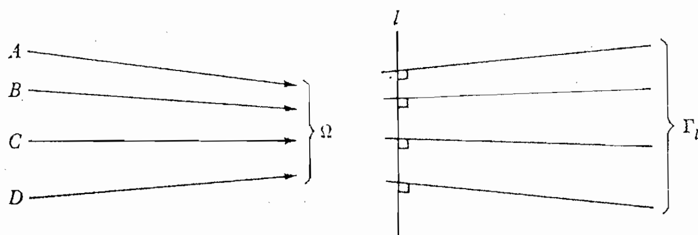


Fig. 7.4b

de un triángulo ordinario son concurrentes. Sin embargo, es interesante que con los puntos ficticios ideal y ultraideal puede enunciarse el teorema general. Proseguiremos ahora para establecer este teorema general, ilustrando así la utilidad de los puntos ficticios.

7.4.4 Teorema. *Las tres mediatrices de los lados de un triángulo ordinario son concurrentes.*

Caso 1 (dos de las mediatrices se cortan en un punto ordinario): Supongamos que las mediatrices de AB y BC (fig. 7.4c) se cortan en un punto ordinario, O. Unase O con A, B, C. Entonces, los triángulos $AC'O$ y $BC'O$

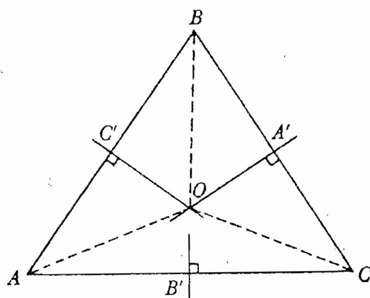


Fig. 7.4c

son congruentes, y los $BA'O$ y $CA'O$ también lo son. Se deduce que $AO = BO = CO$. Unase O con B', el punto medio de AC. Entonces, los triángulos $AB'O$ y $CB'O$ son congruentes, de donde $\sphericalangle AB'O = \sphericalangle CB'O = 90°$, y $B'O$ es la mediatriz de AC.

Caso 2 (dos de las mediatrices se cortan en un punto ultraideal): Sean hiperparalelas las perpendiculares a AB y BC en sus puntos medios, C' y A' (fig. 7.4d). Entonces tienen una perpendicular común MN. Trácense AH, BJ, CK perpendiculares a MN. Trácense AN, NB, BM, MC. Entonces, los triángulos $AC'N$ y $BC'N$ son congruentes (por I 4), por lo que $AN = BN$ y $\sphericalangle ANH = \sphericalangle BNJ$. Se deduce ahora que los triángulos AHN y BJN

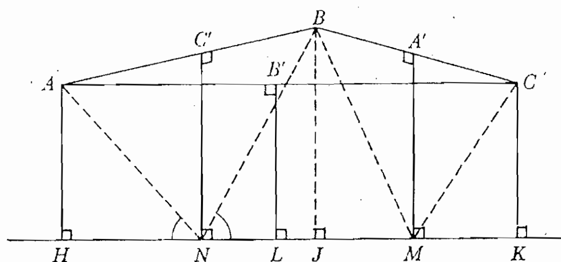


Fig. 7.4d

son congruentes (por I 26), de donde $AH = BJ$. Análogamente, $CK = BJ$. Por tanto, $AH = CK$ y $HKCA$ es un cuadrilátero de Saccheri, y $B'L$, que une el punto medio B' de AC con el punto medio L de HK, es perpendicular tanto a AC como a MN. Se deduce que $A'M$, $B'L$, $C'N$ se cortan en un punto ultraideal Γ_{MN}.

Caso 3 (dos de las mediatrices se cortan en un punto ideal): Supongamos que las mediatrices $A'M$ y $C'N$ de BC y BA, son paralelas (fig. 7.4e). Entonces, la mediatriz $B'L$ de AC no puede cortar ni a $A'M$ ni a $C'N$ (pues

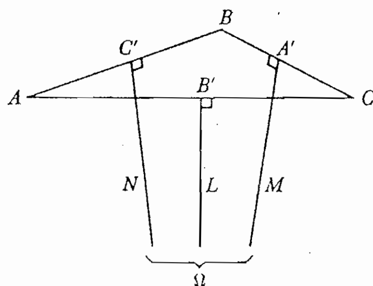


Fig. 7.4e

si no fuera así, entonces, por el caso 1, $A'M$ y $C'N$ tendrían que cortarse). Así mismo, $B'L$ no puede ser hiperparalela ni a $A'M$ ni a $C'N$ (porque si lo fuera, entonces, por el caso 2, $A'M$ y $C'N$ tendrían que ser hiperparalelas). Se deduce que $A'M$, $B'L$, $C'N$ pasan todas por un punto común ideal, Ω, o forman un triángulo que tiene tres vértices ideales, Ω_1, Ω_2 y Ω_3. Demostraremos ahora que la segunda situación no puede ocurrir.

Considérese un triángulo que tenga tres vértices ideales, Ω_1, Ω_2 y Ω_3 (fig. 7.4f). Demostraremos que ninguna recta puede cortar a sus tres lados. Supongamos que ST, por ejemplo, corte a $\Omega_1\Omega_2$ en S y a $\Omega_2\Omega_3$ en T. Trácese $T\Omega_1$ y prolónguese en el sentido contrario hasta el punto R. Entonces, ST quedará dentro de los ángulos verticales $\Omega_2T\Omega_1$ y $RT\Omega_3$ y, en consecuencia, no puede cortar a $\Omega_1\Omega_3$.

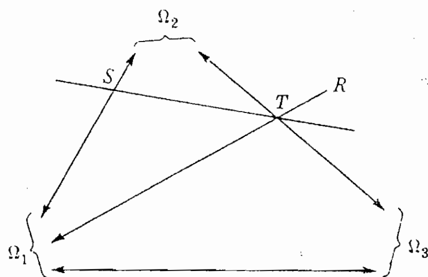


FIG. 7.4f

Demostraremos ahora que siempre hay por lo menos una recta que corta a las tres mediatrices de los lados de un triángulo ordinario. Supongamos que $\sphericalangle A$ (fig. 7.4g) no es menor que ningún otro ángulo del triángulo ABC. Tómese el $\sphericalangle BAK = \sphericalangle B$ y el $\sphericalangle CAL = \sphericalangle C$. Entonces, AK y AL cortarán al lado BC en los puntos K y L. Pero K está en la mediatriz del lado AB, y L, en la mediatriz del lado AC. Por tanto, el lado BC cortará a las tres mediatrices.

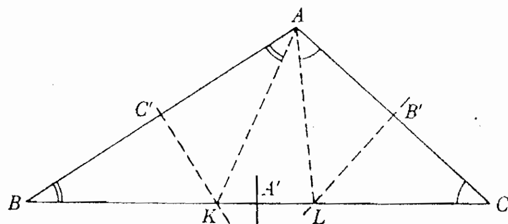


FIG. 7.4g

Se deduce ahora que las mediatrices de los lados de un triángulo ordinario no pueden formar un triángulo que tenga tres vértices ideales, y el caso 3 se ha completado.

Gran parte de la información referente a los puntos ordinarios, ideales y ultraideales puede resumirse claramente en forma gráfica como sigue. Representemos los puntos ordinarios del plano lobachevsquiano por los interiores a una circunferencia dada, K, del plano euclidiano ilimitado (figu-

ra 7.4h), los puntos ideales del plano lobachevsquiano por puntos en la circunferencia K, y los puntos ultraideales del plano lobachevsquiano por los puntos finitos o de los infinitos, exteriores a la circunferencia K. Represéntense las rectas del plano lobachevsquiano por rectas del plano euclidiano ilimitado que se cortan en el interior de la circunferencia K. Sea la recta asociada con un punto ultraideal la recta polar de dicho punto con respecto a la circunferencia K.

En la figura 7.4h, las rectas m y n se cortan en un punto ordinario; las l y m se cortan en un punto ideal, y las p y q se cortan en el punto ultraideal que tiene la recta l como su asociada.

Observemos que dos rectas cualesquiera se cortan en un punto, ordinario, ideal o ultraideal. Por otra parte, no todo par de puntos determina una recta. Dos puntos ordinarios determinan una recta; un punto ordinario y uno ideal determinan una recta; dos puntos ideales determinan una recta; un punto ordinario y uno ultraideal determinan una recta. Dos pun-

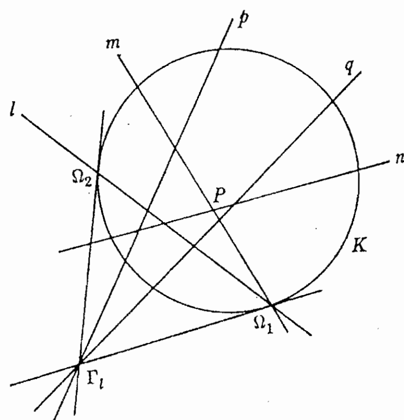


Fig. 7.4h

tos ultraideales a veces determinan una recta y a veces no; un punto ideal y uno ultraideal a veces determinan una recta y a veces no. La primera situación deja de dar un punto cuando las rectas asociadas de los dos puntos ultraideales "se cortan" o son "paralelas"; la segunda situación deja de dar un punto cuando el punto ideal está en la recta asociada del punto ultraideal.

Arthur Cayley (1821-1895) fue quien llamó al lugar geométrico de los puntos ideales del plano lobachevsquiano el *absoluto* del plano. La representación anterior del absoluto de un plano lobachevsquiano por una circunferencia de un plano euclidiano ilimitado, por ahora ha de considerarse

simplemente como un artificio útil para recordar fácilmente y para resumir gran parte de la información respecto a los puntos ordinario, ideal y ultraideal del plano lobachevsquiano. Con la exposición de los antecedentes apropiados, el modelo puede emplearse para ilustrar una relación interesante entre la geometría lobachevsquiana y la proyectiva.

PROBLEMAS

Verifíquense, en el modelo gráfico del absoluto, los siguientes hechos respecto al plano lobachevsquiano.

7.4–1 Dos rectas son perpendiculares si y sólo si sus representaciones en el modelo son rectas conjugadas con respecto al absoluto.

7.4–2 Por un punto ordinario que no esté en una recta dada pasan dos paralelas a ésta.

7.4–3 Dos rectas tienen una perpendicular común si y sólo si son hiperparalelas.

7.4–4 Las alturas de un triángulo son concurrentes en un punto ordinario, ideal o ultraideal.

7.4–5 La proyección ortogonal de una recta m sobre otra no paralela, n, es un segmento abierto de la recta n.

7.4–6 Es posible tener un ángulo y un punto ordinario dentro de él tal que ninguna recta que pase por dicho punto corte a ambos lados del ángulo en puntos ordinarios.

7.4–7 Dadas dos rectas hiperparalelas, a y b, existen dos rectas que se cortan, c y d, cada una paralela a a y a b, y dos hiperparalelas, e y f, cada una paralela a a y a b.

7.4–8 En un triángulo límite hay una recta paralela a los lados paralelos y perpendicular al lado finito.

7.4–9 Existen cuatro rectas paralelas a dos rectas dadas que se cortan.

7.4–10 Si dos rectas a y b se cortan en ángulo agudo, hay dos rectas paralelas a a y perpendiculares a b. Si a y b se cortan perpendicularmente, no hay ninguna recta paralela a a y perpendicular a b. Si a y b son paralelas, hay una recta paralela a a y perpendicular a b. Si a y b son hiperparalelas, hay dos rectas paralelas a a y perpendiculares a b.

7.4–11 Dadas dos rectas paralelas, existe una recta única paralela a cada una, pero de sentidos opuestos.

7.4–12 Se dan seis rectas, 1, 2, 3, 4, 5, 6, tales que 1 sea paralela a 2, 2 a 3, 3 a 4, 4 a 5, 5 a 6, 6 a 1. Si no hay tres de estas rectas que sean paralelas entre sí, y si los pares de rectas 1 y 4, 2 y 5, 3 y 6 se cortan, entonces los tres puntos de intersección son colineales.

7.4–13 Se dan seis rectas 1, 2, 3, 4, 5, 6, tales que 1 sea paralela a 2, 2 a 3, 3 a 4, 4 a 5, 5 a 6, 6 a 1. Si no hay tres rectas que sean paralelas entre sí, y si los pares de rectas 1 y 4, 2 y 5, 3 y 6 son hiperparalelas, entonces sus tres perpendiculares comunes son concurrentes.

7.5 Geometría plana lobachevsquiana; mapeo del plano sobre el interior de una circunferencia. En este corto artículo consideraremos un mapeo interesante que, cuando se realiza en el plano euclidiano, mapea al plano sobre sí mismo, pero cuando se lleva a cabo en el plano lobachevsquiano, mapea al plano sobre el interior de una circunferencia.

Estableceremos primero un teorema importante que se ha llamado teorema de Hjelmslev (problema 3.3–7). Este teorema era conocido hace mucho tiempo, pero fue J. T. Hjelmslev (1873-1950) quien, en 1907, hizo el notable descubrimiento de que pertenecía a una geometría absoluta y que tiene numerosas aplicaciones en la geometría lobachevsquiana. A continuación se da una demostración, por geometría absoluta, del teorema de Hjelmslev.

7.5.1 TEOREMA DE HJELMSLEV. *Los puntos medios de los segmentos que unen pares de puntos correspondientes de dos filas de puntos congruen-*

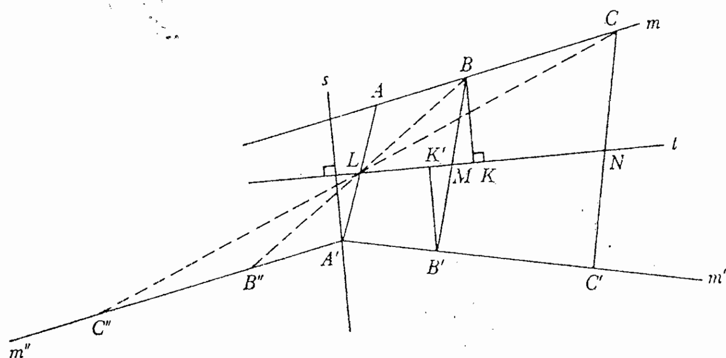


FIG. 7.5a

tes, ya sea de un plano euclidiano o de uno lobachevsquiano, son colineales o coincidentes.

Sean $ABC\cdots$ y $A'B'C'\cdots$ (fig. 7.5a) dos filas de puntos congruentes de las rectas m y m' tales que $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, etc., y sean L, M, N los puntos medios de AA', BB', CC', respectivamente. Es fácil ver que si dos de los puntos medios coinciden, entonces coincidirán todos. En consecuencia, suponemos que los puntos medios son distintos. Sea m'' la imagen

de m en la reflexión $R(L)$, siendo B'' y C'' las imágenes de B y C en la reflexión. Supongamos que s sea la bisectriz del $\sphericalangle B'A'B''$. Entonces, la transformación $R(s)R(L)$ es una isometría que mapea la fila de puntos de m sobre la fila de puntos de m'. Sea t la recta que pasa por L perpendicular a s. Como tanto $R(L)$ como $R(s)$ mapean a t sobre sí misma, se deduce que $R(s)R(L)$ mapea a t sobre sí misma. Sea K el pie de la perpendicular desde B a t. Entonces, $R(s)R(L)$ transporta a K a algún punto K' de t. Como BK se lleva a $B'K'$ y el $\sphericalangle BKK'$ al $\sphericalangle B'K'K$, se deduce que K' es el pie de la perpendicular desde B' a t, de donde (como B y B' están en lados opuestos de t) el punto medio, M, de BB' está en t. Análogamente, el punto medio de CC' está en t, etc., y el teorema queda demostrado.

7.5.2 Notación. Sea O un punto fijo de un plano euclidiano o lobachevsquiano, y sea θ un ángulo agudo fijo que tiene sentido. La transformación que mapea un punto P del plano (fig. 7.5b) al punto P' de modo que $\sphericalangle \overline{POP'} = \theta$ y $\sphericalangle OP'P = 90°$ se designará por S. La transformación $R(O,-\theta)S$ lo será por T.

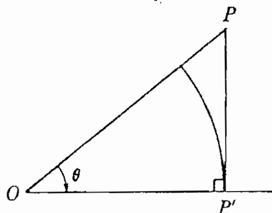


Fig. 7.5b

7.5.3 Teorema. *Ante la transformación* T: 1) *el punto* O *es invariante,* 2) *los segmentos rectilíneos se mapean en segmentos rectilíneos,* 3) *los ángulos con vértice en* O *se mapean en ángulos iguales con vértice en* O, 4) *los ángulos rectos con un lado que pase por* O *se mapean en ángulos rectos con un lado que pase por* O, 5) *las circunferencias con centro en* O *se mapean en circunferencias con centro en* O.

Si las cinco propiedades se verifican para la transformación S, entonces también se verifican para la transformación T, porque $T = R(O,-\theta)S$ y $R(O,-\theta)$ es una isometría. Considérese, entonces, el plano sujeto a la transformación S.

La propiedad 1) es evidente. También es claro que cualquier recta que pase por O se mapea en una recta que pase por O. Considérese (figura 7.5c) una recta m que no pasa por O y sean A, B, C tres puntos cualesquiera de m. La rotación $R(O,2\theta)$ transforma la recta m y su fila de puntos A, B, C en la recta m'' y una fila de puntos congruentes, A'', B''

C''. Por el teorema de Hjelmslev, los puntos medios L, M, N de AA'', BB'', CC'', son colineales (y, en este caso, no coincidentes). Pero L, M, N son las imágenes A', B', C' de A, B, C ante la transformación S. Es ahora claro que la transformación S mapea segmentos rectilíneos en segmentos rectilíneos, y la propiedad 2) queda establecida. Dejamos que el lector establezca las propiedades sencillas 3), 4), 5).

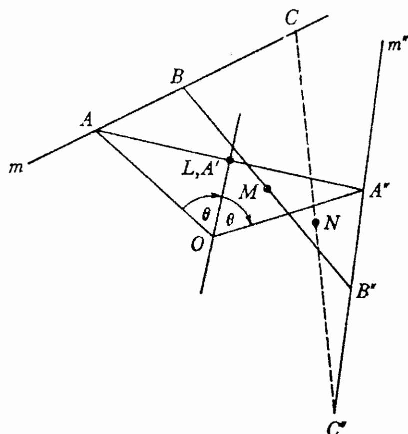


FIG. 7.5c

7.5.4 TEOREMA. *En el plano euclidiano, la transformación* T *es la homotecia* H(O, cos θ), *que, por tanto, mapea al plano sobre sí mismo.*

Puesto que, ante T, los puntos P, P', O son colineales y, en el plano euclidiano, $OP' = OP \cos \theta$.

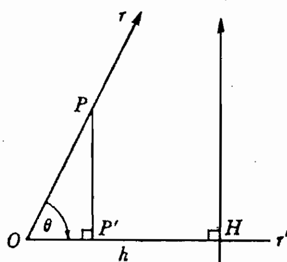


FIG. 7.5d

7.5.5 TEOREMA. *En el plano lobachevsquiano, la transformación* T *mapea al plano al interior de la circunferencia con centro en* O *y radio* h, *donde* $\Pi(h) = \theta$.

Sea r un rayo que parte O (fig. 7.5d). Entonces, ante S, el rayo r se mapea en el r' que forma un ángulo θ con el r. Sobre r' tómese OH igual

a h, la distancia que corresponde a θ como ángulo de paralelismo. Entonces, S mapea al rayo r sobre el segmento OH, excluyendo el punto H. Se deduce que S y, por tanto, también T, mapean al plano lobachevsquiano sobre el interior de una circunferencia con centro en O y radio h.

Muchas propiedades del plano lobachevsquiano pueden obtenerse fácilmente a partir de su mapeo por la transformación T. El lector ha observado sin duda que el mapeo es semejante al modelo gráfico del plano lobachevsquiano descrito al final del artículo anterior. El espacio no nos permite desarrollar más esta correlación.

PROBLEMAS

7.5–1 Demuéstrese que si dos de los puntos medios de los segmentos que unen los pares de puntos correspondientes de dos filas de puntos congruentes de un plano euclidiano o de uno lobachevsquiano son coincidentes, entonces todos son coincidentes.

7.5–2 Compruébese, en la demostración del teorema 7.5.3, que L, M, N no pueden ser coincidentes.

7.5–3 a) Dése una demostración, por geometría absoluta, del teorema: Si un cuadrilátero $OABC$ tiene ángulos rectos en A y C, y si D es el pie de la perpendicular desde O a AC, entonces $\sphericalangle AOD = \sphericalangle BOC$.

b) Dése una demostración euclidiana simple del teorema de la parte a).

7.5–4 a) Dése una demostración, por geometría absoluta, del teorema: Dos ángulos planos cualesquiera de un ángulo diedro son iguales.

b) Búsquese, en un texto de geometría elemental del espacio, la demostración usual del teorema de la parte a) y obsérvese que utilizará el postulado de las paralelas de Euclides.

7.5–5 Con la ayuda del mapeo inducido por la transformación T en el plano lobachevsquiano, demuéstrense los siguientes teoremas de la geometría lobachevsquiana:

a) Si $\overline{PX}$ es paralela a $\overline{AB}$ y R es un punto de PX tal que P y R están al mismo lado de X, entonces $\overline{RX}$ será paralela a $\overline{AB}$.

b) Si $\overline{CD}$ es paralela a $\overline{AB}$, entonces $\overline{AB}$ es paralela a $\overline{CD}$.

c) Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelas a $\overline{EF}$, entonces $\overline{AB}$ es paralela a $\overline{CD}$.

d) A medida que h aumenta, $\Pi(h)$ disminuye, pasando por todos los valores que hay entre 90° y 0°.

e) El teorema del problema 7.5–3 (a) se verifica también si B es un punto ideal.

7.6 Geometría y espacio físico. La geometría euclidiana se basa en un conjunto de postulados, uno de los cuales, el postulado de las paralelas, puede ponerse en la forma: "En el plano de un punto y una recta dados no incidentes, sólo puede trazarse *una recta* por el punto dado y que no corte a la recta dada". La geometría lobachevsquiana se basa en el mismo conjunto de postulados, excepto que el de las paralelas es negado y sustituido por: "En el plano de un punto y una recta dados no incidentes, pueden trazarse *más de una recta* por el punto dado que no corten a la recta dada".* Se demuestra (y así lo haremos en el siguiente capítulo) que este postulado en alternativa es completamente compatible con todos los demás de Euclides.

Se pudiera pensar que una tercera geometría puede basarse análogamente en el conjunto de postulados de Euclides con el postulado de las paralelas rechazado y sustituido por: "En el plano de un punto y una recta dados no incidentes, no puede trazarse por dicho punto ninguna recta que no corte a la dada". Sin embargo, se demuestra fácilmente que esta sustitución del postulado de las paralelas no es compatible con el resto de los postulados de Euclides,† y para obtener un conjunto de postulados compatibles para una tercera geometría basados en esta segunda alternativa, algunos de los otros postulados euclidianos tienen también que modificarse. Pero estos ajustes de los otros postulados pueden hacerse, y los geómetras han desarrollado en esta forma una segunda geometría no euclidiana. Esta segunda geometría no euclidiana es la geometría de Riemann no euclidiana mencionada hacia el final del artículo 7.1. En algunos aspectos, la geometría no euclidiana de Riemann es más complicada que la de Lobachevsky, y por ello no tenemos suficiente espacio para desarrollarla aquí.

Como tenemos varias geometrías del espacio, la euclidiana y las dos geometrías no euclidianas clásicas, se hace a menudo la pregunta: "¿Cuál es la geometría verdadera?". Es claro que lo que se quiere dar a entender por esta cuestión es: "¿Qué geometría describe adecuadamente el espacio físico?". Ahora bien, cuando se aplican varias teorías matemáticas a una situación física dada, lo que nos interesa es la teoría matemática que explique mejor o que concuerde más con los hechos observados de la situación física, y que resista las clases de pruebas que generalmente se hacen sobre las hipótesis en cualquier campo de la investigación científica. En nuestro caso actual, entonces, nos interesa cuál de los sistemas de geometría eucli-

* En el artículo 7.2 adoptamos realmente un postulado algo más fuerte que éste, pero, como se indicó entonces, lo hicimos únicamente por conveniencia. De hecho, puede demostrarse que un postulado aún más débil del que acabamos de establecer será suficiente.

† La sustitución contradice, por ejemplo, la proposición I 27.

diano y los dos clásicos no euclidianos concuerdan más estrechamente con los hechos observados en el espacio físico. Ahora bien, no es difícil demostrar que las tres geometrías consideradas se ajustan igualmente a nuestra porción muy limitada del espacio y, por tanto, parecerá que debemos contentarnos con una respuesta indeterminada hasta que pueda idearse alguna prueba experimental crucial en gran escala para asentar el tema. Dicha prueba crucial parecería que es la medida de la suma de los tres ángulos de un gran triángulo físico. Una prueba de esta naturaleza fue hecha por Gauss, quien midió la suma de los ángulos de un triángulo cuyos vértices eran tres picos de montaña. No encontró ninguna desviación de 180°, más allá del error probable de la medición, ni tampoco nadie que desde entonces haya conducido experimentos semejantes. Pero recordaremos que la discrepancia de la suma de los ángulos de un triángulo de 180° en las dos geometrías no euclidianas es proporcional al área del triángulo, y el área de cualquier triángulo hasta ahora medido así puede ser tan pequeña que cualquier discrepancia cubierta por los errores admitidos en las mediciones sea tolerada.

Debido al embrollo evidentemente intrincado del espacio y de la materia, hay razones para creer que puede ser imposible determinar por experimentos físicos si nuestro espacio es euclidiano o no euclidiano. Como todas las mediciones comprenden suposiciones tanto físicas como geométricas, un resultado observado puede explicarse de muchas maneras, simplemente haciendo cambios compensadores adecuados en nuestras cualidades supuestas del espacio y de la materia. Por ejemplo, es muy posible que una discrepancia observada en la suma de los ángulos de un triángulo pueda explicarse conservando las suposiciones de la geometría euclidiana, pero modificando al mismo tiempo alguna ley física, tal como alguna ley de óptica. Y asimismo, la ausencia de una discrepancia de este tipo puede ser compatible con las suposiciones de una geometría no euclidiana, junto con algunos ajustes adecuados en nuestras suposiciones acerca de la materia. Con estas bases, Henri Poincaré (1854-1912) sostuvo la impropiedad de preguntar cuál es la única geometría verdadera. Para aclarar este punto de vista, Poincaré propuso un universo imaginario Σ que ocupaba el interior de una esfera de radio R sumergida en un espacio euclidiano, y en el cual supuso que las siguientes leyes físicas se verificaban:

1) En un punto P de Σ la temperatura absoluta T estaba dada por $T = k(R^2 - r^2)$, donde r es la distancia de P al centro de Σ y k es constante.

2) Las dimensiones lineales del cuerpo material variaban directamente con la temperatura absoluta del sitio en que estaba el cuerpo.

3) Todos los cuerpos materiales dentro de Σ asumen inmediatamente las temperaturas de sus sitios.

Ahora bien, es bastante posible que los habitantes de Σ ignoren las tres leyes físicas anteriores que se verifican en su universo. Por ejemplo, un procedimiento para observar una variación de la temperatura a medida que vamos de un recinto caliente, digamos, a otro más frío, consiste en *percibir* el cambio al llevar nuestros cuerpos calientes al cuarto más frío y esperar luego a que nuestra piel se adapte a la nueva temperatura. En Σ, la ley 3 neutralizaría esta prueba. Un termómetro no serviría tampoco; por la ley 2, todos los cuerpos materiales se dilatarían y contraerían térmicamente en la misma forma. La ley 2 impide también que un habitante de Σ descubra su cambio de tamaño con una vara de medir que lleve consigo. Un habitante de Σ sentiría que su universo es de extensión infinita con la simple base de que nunca alcanzase un límite después de dar un número finito, N, de pasos, por grande que sea N. Por supuesto, que no sabe que esto se debe a que él mismo, y con él la longitud de sus pasos, se vuelven más pequeños cada vez a medida que avanza desde el centro de su universo.

Es fácil ver que las líneas geodésicas de Σ (las trayectorias de mínima longitud que unen sus pares de puntos), como se miden por los habitantes

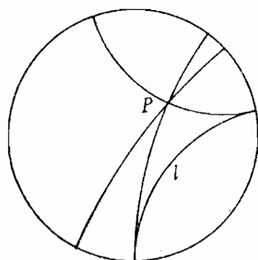


Fig. 7.6a

de Σ, son líneas que se curvan hacia el centro de Σ. De hecho, puede demostrarse que la geodésica que pasa por dos puntos, A y B de Σ, es un arco de circunferencia que pasa por A y B que corta a la esfera limitadora de Σ ortogonalmente. Impongamos ahora otra ley física sobre el universo Σ, suponiendo:

4) Que la luz se propaga siguiendo geodésicas de Σ.

De esta condición se podría dar cuenta físicamente llenando Σ con un gas que tuviera un índice adecuado de refracción en cada punto de Σ. Ahora bien, debido a la ley 4, las geodésicas de Σ realmente se "ven en línea recta" por un habitante de Σ. Pero el lector puede demostrar fácilmente (fig. 7.6a, donde se han trazado por un punto P tres "rectas" que

no cortan a la "línea" l) que en la geometría de las líneas geodésicas de Σ, el postulado de paralelas lobachevsquiano se verifica, de modo que un habitante de Σ creería que él vive en un mundo no euclidiano. Aquí tenemos una parte del espacio ordinario, y supuestamente euclidiano, que, debido a las diferentes leyes físicas (y realmente inobservadas) parece ser no euclidiano.

Haríamos mejor, entonces, en preguntar, no cuál es la geometría *verdadera,* sino cuál es la *más conveniente,* y esta conveniencia podría depender de la aplicación que se tenga en consideración. Ciertamente que para dibujar, para la topografía terrestre y para la construcción de edificios y puentes ordinarios, la geometría euclidiana es probablemente la más conveniente, simplemente porque es la más sencilla con la que se puede trabajar.

Hay estudios físicos en los que otras geometrías distintas de la euclidiana se ha visto que son más aceptables. Por ejemplo, Einstein encontró en su estudio de la teoría general de la relatividad que ninguna de las tres geometrías que hemos considerado es adecuada, y adoptó otra clase de geometría no euclidiana que había sido mencionada por primera vez por Bernhard Riemann en su disertación de 1854 (una geometría no euclidiana cuyas discrepancias de la euclidiana no son uniformes, pues varía de un lugar a otro en el espacio, según la concentración de materia presente en el espacio en ese sitio). Así mismo, un estudio reciente * del *espacio visual* (el espacio sicológicamente observado por personas de visión normal) llegó a la conclusión de que dicho espacio podía ser más convenientemente descrito por la geometría no euclidiana lobachevsquiana. Pueden darse otros ejemplos.

Aquí concluimos este capítulo sobre geometría no euclidiana. Ya vimos, en este último artículo, que la geometría no euclidiana ha influido vitalmente en los conceptos primitivos de la geometría y, naturalmente, ello nos conduce a considerar los fundamentos de la geometría. Haremos esto en el siguiente capítulo, en el que, entre otras cosas, veremos la cuestión de la compatibilidad de la geometría no euclidiana.

BIBLIOGRAFIA

BOLYAI, JOHN, "The Science of Absolute Space", tr. por G. B. Halsted (1895). Véase Bonola.

BONOLA, ROBERTO, *Non-Euclidean Geometry,* tr. por H. S. Carslaw. Nueva York: Dover Publications, Inc., 1955. Contiene a Bolyai y Lobachevski. El volumen original italiano se publicó en 1906.

* R. K. Luneberg, *Mathematical Analysis of Binocular Vision,* Princeton, N. J.: Princeton University Press (publicado por el Instituto Dartmouth Eye), 1947.

CARSLAW, H. S., *Non-Euclidean Plane Geometry and Trigonometry.* Nueva York: Longmans, Green and Company, 1916. Reimpreso en *String Figures, and Other Monographs,* Chelsea Publishing Company, 1960.

COOLIDGE, J. L., *The Elements of Non-Euclidean Geometry.* Nueva York: Oxford University Press, 1909.

COXETER, H. S. M., *Non-Euclidean Geometry.* Toronto: University of Toronto Press, 1947.

EVES, HOWARD, y C. V. NEWSOM, *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics.* Nueva York: Holt, Rinehart and Winston, 1958.

FORDER, H. G., *Geometry.* Nueva York: Hutchinson's University Library, 1950.

JAMES, GLENN, ed., *The Tree of Mathematics.* Pacoima, Cal.: The Digest Press, 1957.

KULCZYCKI, STEFAN, *Non-Euclidean Geometry,* tr. por Stanislaw Knapowski. Nueva York: Pergamon Press, 1961.

LIEBER, L. R., y H. G. LIEBER, *Non-Euclidean Geometry, or Three Moons in Mathesis.* Brooklyn, N. Y.: El Instituto de Matemáticas y Arte, 1931.

LOBACHEVSKI, NICHOLAS, "Geometrical Researches on the Theory of Parallels", tr. por G. B. Halsted (1891). Véase Bonola.

MANNING, H. P., *Non-Euclidean Geometry.* Boston: Ginn and Company, 1901.

POINCARÉ, HENRI, *The Foundations of Science,* tr. por G. B. Halsted. Lancaster, Pa.: The Science Press, 1913.

RANSOM, W. R., *3 Famous Geometries.* Medford, Mass.: publicación privada, 1959.

SOMMERVILLE, D. M. Y., *The Elements of Non-Euclidean Geometry.* Londres: G. Bell and Sons, Ltd., 1914.

WOLFE, H. E., *Introduction to Non-Euclidean Geometry.* Nueva York: The Dryden Press, Inc., 1945.

YOUNG, J. W. A., ed., *Monographs on Topics of Modern Mathematics Relevant to the Elementary Field.* Nueva York: Longmans, Green and Company, 1911. Reimpreso por Dover Publications, Inc., 1955.

VIII. FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRIA

8.1. ALGUNAS FALLAS LOGICAS DE LOS "ELEMENTOS" DE EUCLIDES. 8.2. FUNDAMENTOS POSTULACIONALES MODERNOS PARA LA GEOMETRIA EUCLIDIANA. 8.3. AXIOMATICA FORMAL. 8.4. EL MODELO DE POINCARE Y LA COMPATIBILIDAD DE LA GEOMETRIA PLANA LOBACHEVSQUIANA. 8.5. DEDUCCIONES DEL MODELO DE POINCARE. 8.6. GEOMETRIA PROYECTIVA NO DESARGUESIANA. 8.7. GEOMETRIAS FINITAS.

EL DESCUBRIMIENTO DE UNA GEOMETRIA NO EUCLIDIANA tuvo un efecto marcado en el desarrollo posterior de la geometría y, realmente, en el desarrollo subsiguiente de gran parte de la matemática en general. Antes del descubrimiento se creía que las matemáticas trataban de hallar verdades únicas y necesarias acerca del mundo real, y que sus postulados y teoremas eran observados esencialmente y se deducían de las leyes de la Naturaleza. En particular, se pensaba que los postulados y teoremas de la geometría constituían una descripción inequívoca del espacio físico. El descubrimiento de una geometría no euclidiana obligó a los matemáticos a adoptar un nuevo punto de vista sobre esta materia. Claramente, las geometrías euclidiana y lobachevsquiana no podían ser cada una una descripción del espacio físico, pues muchos teoremas de estas dos geometrías se contradicen. Si la geometría lobachevsquiana se considerara como parte de la matemática, entonces ésta no podría relacionarse sólo con verdades apodícticas respecto al mundo físico, y se necesitaría desarrollar un nuevo punto de vista de la naturaleza de las matemáticas. No sólo esto, sino que los fundamentos de estas ciencias también tendrían que reconstruirse cuidadosamente. Muchos individuos geniales fueron atraídos por esta última tarea, y se realizó una cantidad enorme de investigaciones fundamentales. Se ha informado que en el período de treinta años desde 1880 hasta 1910, aparecieron unos 1 385 artículos de-

dicados únicamente a los fundamentos de la geometría, y la actividad en este campo es aún muy grande.

Este capítulo se dedica a las cuestiones anteriores. Se intentará describir un punto de vista actual de la naturaleza de las matemáticas; se introducirá al lector en el tema importante y muy interesante de los fundamentos de la geometría, y se señalará la naturaleza puramente hipotético-deductiva de gran parte del estudio geométrico corriente.

8.1 Algunas fallas lógicas de los Elementos de Euclides. Sería realmente muy sorprendente si los *Elementos* de Euclides, siendo un intento tan primitivo y colosal del método postulacional de presentación, no tuviesen fallas lógicas. Por tanto, no constituye gran descrédito para la obra que las investigaciones críticas hayan revelado varios defectos en su estructura lógica. Probablemente, los más graves de estos defectos son ciertas suposiciones tácitas que se emplean en las deducciones, pero que no son garantizadas por los postulados y los axiomas de la obra. Este peligro se presenta en cualquier estudio deductivo cuando el tema en consideración es demasiado familiar al autor. Generalmente, una comprensión profunda del tema, dentro de un campo de estudio, se considera como un prerrequisito indispensable para un trabajo serio, pero al desarrollar un sistema deductivo dicho conocimiento puede constituir cierta desventaja, a menos que se tomen precauciones adecuadas.

Un sistema deductivo difiere de una simple colección de principios en que se organiza de manera muy especial. La clave para la organización reside en que todos los principios del sistema, distintos de las suposiciones originales, tienen que ser deducibles de estas hipótesis iniciales, y que si se deslizara en la labor una suposición adicional, la organización deseada no se realizaría. Ahora bien, nadie que trate de formular un sistema deductivo conocerá más acerca de su tema que justamente las suposiciones iniciales que deseen emplear. Tiene ante él un conjunto de principios que pertenecen al tema, algunos de los cuales los selecciona para postulados y el resto presumiblemente los deduce de sus postulados como teoremas. Pero, con un gran cuerpo de información ante sí, es muy fácil que emplee en las demostraciones alguna parte de esta información que esté contenida en los postulados. Una parte de la información utilizada en esta forma puede ser tan aparentemente evidente o parecer tan elemental que se admite inconscientemente. Es claro que dicha admisión tácita echa a perder la rigidez de la organización del sistema deductivo. Además, si dicha parte de la información contuviera algún concepto erróneo, su introducción podría conducir a resultados que no sólo no se deducirían estrictamente de los postulados, sino que realmente serían contradictorios a algún teorema previamente establecido. Aquí, entonces, está el peligro de una familiaridad

demasiado grande con el tema del discurso; en todo momento al construir un sistema deductivo se debe proceder *como si* se fuera completamente ignorante de la materia que se está desarrollando.

La admisión tácita de Euclides de algo que no estaba contenido en sus suposiciones básicas se ejemplifica en la primera proposición deducida de los *Elementos*. Para examinar la dificultad citaremos al pie de la letra la proposición I 1 de la traducción de Heath.*

Sobre una recta finita dada constrúyase un triángulo equilátero.

Sea *AB* [fig. 8.1a] la recta finita dada.

Por tanto, se necesita construir un triángulo equilátero sobre la recta *AB*.

Con centro en *A* y distancia *AB*, trácese la circunferencia *BCD*. [Postulado 3.]

Nuevamente, con centro *B* y distancia *BA*, descríbase la circunferencia *ACE*. [Postulado 3.]

Y únase el punto *C*, en el que las circunferencias se cortan, con los puntos *A* y *B* por las rectas *CA*, *CB*. [Postulado 1.]

Ahora bien, como el punto *A* es el centro de la circunferencia *CDB*, *AC* es igual a *AB*. [Definición 15.]

Igualmente, como el punto *B* es el centro de la circunferencia *CAE*, *BC* es igual a *BA*. [Definición 15.]

Pero también se demostró que *CA* es igual a *AB*; por tanto, cada una de las rectas *CA*, *CB* es igual a *AB*. Y las cosas que son iguales a la misma cosa también son iguales entre sí; por consiguiente, *CA* también es igual a *CB*. [Axioma 1.]

Por tanto, las tres rectas *CA*, *AB*, *BC* son iguales entre sí.

De ahí que el triángulo *ABC* sea equilátero; y se ha construido sobre la recta finita dada *AB*.

Que es lo que se quería hacer.

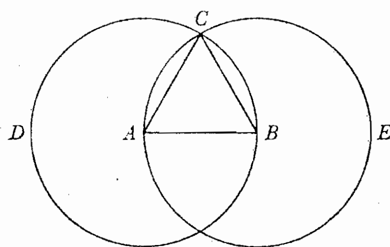


Fig. 8.1a

Ahora bien, la construcción de las dos circunferencias de esta demostración ciertamente que se justifica por el postulado 3, pero no hay nada en los primeros principios de Euclides que explícitamente garantice que las dos circunferencias se corten en un punto *C*, y que no pasará de una forma u otra, la una de una parte a otra de la otra sin tener ningún

* T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* 3 vols., 2ª ed. Nueva York: Dover Publications, Inc., 1956.

punto común. Luego la existencia de este punto tiene que apoyarse en postulados o bien ha de demostrarse, y se puede demostrar, que los postulados de Euclides son insuficientes para permitir esto último. Unicamente con la introducción de alguna suposición adicional puede establecerse la existencia del punto C. Por consiguiente, la proposición no se deduce de los primeros principios de Euclides, y la demostración de la proposición es nula.

El sofisma está aquí, no en admitir algo contrario a nuestro concepto de circunferencias, sino en suponer algo que no se sobrentienda por nuestras suposiciones básicas aceptadas. Este es un ejemplo en el que la suposición tácita es tan evidente y elemental que no parece ser una suposición. El sofisma es sutil, pero si Euclides no hubiera sabido acerca de circunferencias más de lo que sus primeros principios dicen sobre ellas, seguramente no hubiera caído en este error.

Lo que se necesita aquí es algún postulado adicional que garantice que las dos circunferencias referidas se cortarán. El postulado 5 da una condición en la cual dos rectas se cortarán. Necesitamos postulados semejantes que nos indiquen cuándo se cortarán dos circunferencias y cuándo se cortarán una circunferencia y una recta. Lo que esto esencialmente implica es la continuidad de las circunferencias y las rectas, y en los modernos tratados de geometría se explica la existencia de los puntos deseados de intersección por alguna clase de postulado de continuidad.

Otra admisión tácita hecha por Euclides es que la recta es de extensión infinita. Aunque el postulado 2 asegura que una recta puede prolongarse indefinidamente, esto no implica necesariamente que una recta sea de extensión infinita, sino meramente que es sin fin, o ilimitada. El arco de circunferencia máxima que une dos puntos de una esfera pudiera prolongarse indefinidamente sobre dicha circunferencia, haciendo que sea sin fin el arco prolongado, pero sin que ciertamente sea de extensión infinita. Ahora es concebible que una recta pueda comportarse semejantemente, y que después de una prolongación finita, también, pueda volver sobre sí misma. Fue Bernhard Riemann, en su disertación famosa, *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, en 1854, quien hizo la distinción entre lo ilimitado y la infinitud de las rectas. Hay numerosas ocasiones en que Euclides inconscientemente admitió la infinitud de una recta. Considérese brevemente, por ejemplo, la proposición I 16:

En un triángulo, si uno de los lados se prolonga, el ángulo exterior es mayor que cualquiera de los interiores opuestos.

Un resumen de la demostración de Euclides es el siguiente. Sea ABC (fig. 8.1b) el triángulo dado, prolongando BC hasta D. Sea E el punto

medio de AC. Trácese BE y prolónguese su propia longitud hasta F. Trácese CF. Entonces se puede demostrar fácilmente que los triángulos BEA y FEC son congruentes, de donde $\measuredangle FCE = \measuredangle BAC$. Pero $\measuredangle ACD > \measuredangle FCE$, de donde $\measuredangle ACD > \measuredangle BAC$. Prolongando AC hasta G podemos demostrar análogamente que $\measuredangle BCG$, que es igual al $\measuredangle ACD$, también es mayor que $\measuredangle ABC$.

Ahora bien, si una recta pudiera volver a su punto de partida, como el arco de circunferencia máxima considerado antes, BF podría ser tan larga que F coincidiera con B o quedaría dentro del segmento BE. Si éste fuera

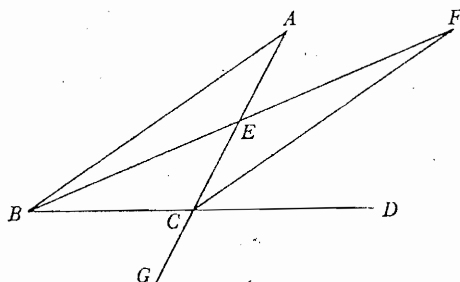


FIG. 8.1b

el caso, la demostración seguramente fallaría. Euclides fue engañado por su examen visual de la figura más bien que por los principios que deberían ser la base de su razonamiento. Luego, claramente, para hacer que la demostración sea universalmente válida, debemos demostrar o bien postular la infinitud de las rectas.

Se pueden indicar otras admisiones tácitas que, como las anteriores, fueron inconscientemente hechas por Euclides y que vició el verdadero carácter deductivo de su trabajo. Por ejemplo, en la demostración de la proposición I 21, Euclides inconscientemente admitió que si una recta entra a un triángulo por un vértice debe, si se prolonga lo suficiente, cortar el lado opuesto. Fue Moritz Pasch (1843-1930) quien reconoció la necesidad de un postulado para considerar esta situación. Nuevamente, Euclides no tomó en cuenta el *orden lineal,* y su concepto de "entre" o "dentro" no tiene ninguna base postulacional, con el resultado de que las paradojas son posibles. Además, su postulado 1, que garantiza la existencia de por lo menos una recta que una dos puntos A y B, probablemente quiso implicar la unicidad de esta recta, pero el postulado falla en asegurar tanto. Y las objeciones que pueden surgir contra el principio de superposición, empleadas aún en muchos textos populares, se cumplen sólo parcialmente por el axioma 4 de Euclides.

En resumen, la verdad de la cuestión es que las suposiciones iniciales de Euclides no son simplemente suficientes para las deducciones de las 465 proposiciones de los *Elementos;* su conjunto de postulados y axiomas necesita ampliarse considerablemente. La labor de perfeccionar las suposiciones iniciales de Euclides, de modo que toda su geometría pueda deducirse rigurosamente, ocupó a los matemáticos por más de dos mil años. No fue sino hasta el final del siglo diecinueve y la primera parte del veinte, después que los fundamentos de la geometría fueron sometidos a un intenso estudio, cuando se proporcionaron conjuntos satisfactorios de postulados para la geometría plana y del espacio de Euclides.

No sólo la obra de Euclides es perjudicada por las numerosas admisiones tácitas, sino que también algunas de las definiciones preliminares están abiertas a la crítica. Euclides hizo una especie de intento de dar una definición explícita, o por lo menos una explicación, de todos los términos de su discurso. Ahora bien, algunos términos de un discurso lógico tienen que ser deliberadamente elegidos como términos primitivos o indefinidos, pues es tan imposible definir todos los términos de un discurso *explícitamente* como lo es demostrar todas las proposiciones de un discurso. Los postulados del discurso son, en análisis final, proposiciones admitidas acerca de los términos primitivos. Desde este punto de vista, los términos primitivos pueden considerarse que son definidos *implícitamente,* en el sentido de que son cosas cualesquiera que satisfagan los postulados.

En el desarrollo de Euclides de su geometría, los términos *punto* y *recta,* por ejemplo, pudiera haberlos incluido en un conjunto de términos primitivos del discurso. De cualquier modo, la definición de Euclides de un punto como "aquello que no tiene parte alguna" y de recta como "una línea que tiene uniformemente distribuidos todos sus puntos sobre ella" son, desde un punto de vista lógico, completamente inadecuadas. Una distinción, como veremos, entre el concepto griego y el moderno del método postulacional reside en esta cuestión de los términos primitivos; en el concepto griego no hay lista simple de términos primitivos. Otras diferencias entre el concepto griego y el moderno del método postulacional se evidenciarán cuando se expongan las revisiones modernas de la obra de Euclides.

PROBLEMAS

8.1–1 Si una suposición hecha tácitamente en un desarrollo deductivo comprendiese un concecpto erróneo, su introducción podría conducir no sólo a un resultado que no se deduciría de los postulados del sistema deductivo, sino a uno que realmente contradijera a algún teo-

rema previamente establecido del sistema. Desde este punto de vista, critíquense las tres siguientes paradojas geométricas:

a) *Demuéstrese que cualquier triángulo es isósceles.*

Sea ABC un triángulo (fig. 8.1c). Trácese la bisectriz del $\sphericalangle C$ y la mediatriz del lado AB. Desde su punto de intersección E, bájense las perpendiculares EF y EG a AC y BC, respectivamente, y trácense EA y EB.

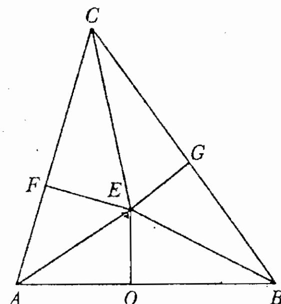


Fig. 8.1c

Ahora bien, los triángulos rectángulos CFE y CGE son congruentes, porque cada uno tiene CE por hipotenusa y, además, $\sphericalangle FCE = \sphericalangle GCE$. Por consiguiente, $CF = CG$. Igualmente, los triángulos rectángulos EFA y EGB son congruentes, porque el cateto EF de uno es igual al cateto EG del

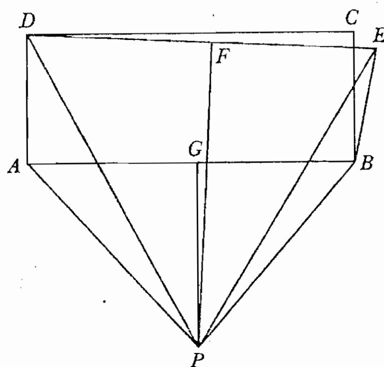


Fig. 8.1d

otro (un punto E de la bisectriz del ángulo C equidista de los lados de dicho ángulo) y, además, la hipotenusa EA de uno es igual a la EB del otro (un punto E de la mediatriz de un segmento rectilíneo, AB, equidista de los extremos de dicho segmento). Por consiguiente, $FA = GB$. Se deduce ahora que $CF + FA = CG + GB$, o $CA = CB$, y el triángulo es isósceles.

b) *Demuéstrese que un ángulo recto es igual a un ángulo obtuso.*

Sea $ABCD$ un rectángulo (fig. 8.1d). Trácese la recta BE exterior al rectángulo y de longitud igual a BC y, por tanto, a AD. Trácense las mediatrices de DE y AB; como son perpendiculares a rectas no paralelas, deben cortarse en un punto, P. Trácense AP, BP, DP, EP. Entonces, $PA = PB$ y $PD = PE$ (un punto de la mediatriz de un segmento recto equidista de los extremos de éste). Además, por construcción, $AD = BE$. Por consiguiente, los triángulos APD y BPE son congruentes, puesto que los tres lados de uno son iguales a los tres del otro. De aquí que $\sphericalangle DAP = \sphericalangle EBP$. Pero $\sphericalangle BAP = \sphericalangle ABP$, puesto que estos ángulos son los ángulos en la base del triángulo isósceles APB. Por sustracción se deduce ahora que el ángulo recto DAB = ángulo obtuso EBA.

c) *Demuéstrese que hay dos perpendiculares desde un punto a una recta.*

Supongamos que dos circunferencias se cortan en A y B (fig. 8.1e). Trácense los diámetros AC y AD, y supongamos que la unión de C y D

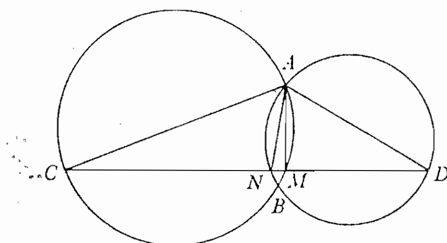


FIG. 8.1e

corta a las circunferencias respectivas en M y N. Los ángulos AMC y AND son rectos, pues cada uno está inscrito en una semicircunferencia. En consecuencia, AM y AN son dos perpendiculares a CD.

8.1–2 Para garantizar la existencia de ciertos puntos de intersección (de recta con circunferencia y de circunferencia con circunferencia), Richard Dedekind (1831-1916) introdujo en la geometría el siguiente postulado de continuidad: *Si todos los puntos de una recta se dividen en dos clases, de modo que cada punto de la primera clase quede a la izquierda de cada punto de la segunda, entonces existe uno y sólo un punto de la recta que produce esta división de todos sus puntos en dos clases, esto es, esta separación de la recta en dos porciones.*

a) Complétense los detalles de la siguiente demostración indicada del teorema: *El segmento de recta que une un punto* A *del interior de una circunferencia con un punto* B *del exterior, tiene un punto común con la circunferencia.*

Sea O el centro y r el radio de la circunferencia dada (fig. 8.1f), y sea C el pie de la perpendicular desde O hasta la recta determinada por A y B. Los puntos del segmento AB pueden dividirse en dos clases: aquellos puntos P para los que $OP < r$ y aquellos Q para los cuales $OQ \geqq r$. Puede demostrarse que, en todo caso, $CP < CQ$. En consecuencia, por el postulado de Dedekind, existe un punto R de AB tal que todos los puntos que le preceden pertenecen a una clase y todos aquellos que le siguen pertenecen a la otra. Ahora bien, $OR \nless r$, porque en caso contrario podríamos elegir S sobre AB, entre R y B, de modo que $RS < r - OR$. Pero, como $OS <$

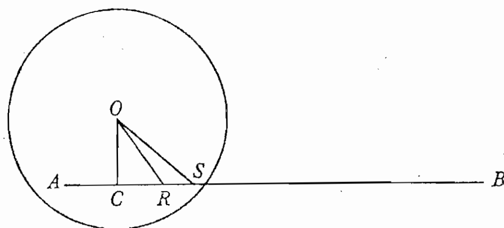


Fig. 8.1f

$OR + RS$, esto implicaría el absurdo de que $OS < r$. Análogamente, puede demostrarse que $OR \ngtr r$. En consecuencia, debemos tener $OR = r$, y el teorema queda establecido.

b) ¿Cómo podría extenderse el postulado de Dedekind para que cubriera los ángulos?

c) ¿Cómo podría extenderse el postulado de Dedekind para que cubriera los arcos circulares?

8.1–3 Por conveniencia, volveremos a expresar los tres primeros postulados de Euclides en las formas equivalentes siguientes:

1) *Dos puntos distintos determinan una recta.*

2) *Una recta es ilimitada.*

3) *Hay una circunferencia que tenga un punto dado como centro y que pase por un segundo punto dado.*

Demuéstrese que los postulados de Euclides, parcialmente reexpresados aquí delante, se verifican si los puntos del plano se restringen a aquellos cuyas ordenadas cartesianas rectangulares para algún sistema de referencia fijo sean números racionales. Sin embargo, demuéstrese que con esta restricción o condición, una circunferencia y una recta que pase por su centro no es necesario que se corten.

8.1–4 Demuéstrese que los postulados de Euclides (como se reexpresaron parcialmente en el problema 8.1–3) se verifican si interpretamos al plano como la superficie de una esfera, a las rectas como circunferencias

máximas de la misma, y a los puntos como puntos sobre la esfera. Sin embargo, demuéstrese que con esta interpretación se verifica lo siguiente:

a) Las rectas paralelas no existen.

b) Todas las perpendiculares a una recta dada levantadas a un lado de dicha recta se cortan en un punto.

c) Es posible tener dos rectas distintas que unan los mismos dos puntos.

d) La suma de los ángulos de un triángulo excede de dos ángulos rectos.

e) Existen triángulos que tienen todos sus ángulos rectos.

f) Un ángulo exterior de un triángulo no siempre es mayor que cada uno de los dos interiores separados de él.

g) La suma de dos lados de un triángulo puede ser menor que el tercer lado.

h) Un triángulo con un par de ángulos iguales puede tener sus lados opuestos desiguales.

i) El lado mayor de un triángulo no es necesariamente opuesto al ángulo mayor del mismo.

8.1–5 En 1882 Moritz Pasch formuló el siguiente postulado: *Sean* A, B, C *tres puntos que no estén en la misma recta, y sea* m *una recta que está en el plano de* ABC *sin que pase por ninguno de los puntos* A, B, C. *Entonces, si la recta* m *pasa por un punto del segmento* AB, *también pasará por un punto del segmento* BC *o por un punto del segmento* AC. Este postulado es una de las suposiciones clasificadas por los geómetras modernos como *postulado de orden,* y ayuda a entender la idea de estar "entre dos puntos o dentro de un segmento".

a) Demuéstrese, como consecuencia del postulado de Pasch, que *si una recta entra en un triángulo por un vértice, tiene que cortar al lado opuesto.*

b) Demuéstrese que el postulado de Pasch no se verifica para un triángulo esférico cualquiera cortado por una circunferencia máxima.

8.2 Fundamentos postulacionales modernos de la geometría euclidiana. Después del descubrimiento de la geometría no euclidiana se sintió la necesidad de un tratamiento postulacional verdaderamente satisfactorio de la geometría euclidiana. Todas las suposiciones encubiertas, o tácitas, tenían que indagarse y había que proponer un conjunto lógicamente aceptable de postulados fundamentales para la materia en forma clara e inequívoca. Dicha organización de la geometría euclidiana fue realizada primero en 1882 por el matemático alemán Moritz Pasch.

En su tratamiento de la geometría euclidiana, Pasch reconoció la distinción importante entre definición *explícita* e *implícita.* La mayor parte de la gente está familiarizada con el concepto de definición explícita, porque es la que se emplea con más frecuencia. En una definición explícita un nuevo término se expresa por medio de los que ya se han aceptado en el vocabulario. Luego, en un sentido técnico, un nuevo término introducido de tal manera sirve simplemente como la abreviatura de una combinación compleja de términos ya corrientes. Por tanto, un nuevo término introducido por una definición explícita es realmente arbitrario, aunque conveniente, y puede omitirse completamente, aunque entonces el discurso en que el vocabulario se ha de emplear aumente de inmediato su complejidad.

La definición implícita, por otra parte, no es relativamente familiar a la mayoría de la gente, aun cuando dicha noción es indispensable en la teoría lógica. La necesidad de la definición implícita se debe a que es imposible definir todos los términos explícitamente si deseamos evitar una indefinida circularidad. Es imposible, por ejemplo, definir una palabra *A* en función de otra *B,* luego la *B* en función de otra *C,* y así indefinidamente, pues tal procedimiento implicaría un número infinito de palabras del vocabulario. Por supuesto que en el diccionario se intenta definir todas las palabras explícitamente por el uso admitido de la circularidad, pero se espera que la persona que utilice el diccionario haya desarrollado un vocabulario adecuado de modo que las palabras en función de las cuales se defina alguna palabra desconocida ya le sean familiares.

Toda persona se dará cuenta de su propio intento de introducir nuevas palabras en su vocabulario observando cómo se emplean estas palabras por otros. Esta idea de definir una palabra por el medio del contexto en que se presenta es la idea básica de la definición implícita. En un discurso lógico, como no todos los términos técnicos pueden definirse explícitamente, tiene que haber algunos cuyos significados sólo puede uno captar por el contexto en el que se empleen. En otras palabras, en un discurso lógico se tiene que aceptar un número relativamente pequeño de términos técnicos primitivos que se utilizan para definir explícitamente todos los demás términos que intervengan en el discurso, no dándose definiciones de dichos primitivos, aparte de las dadas a ellos implícitamente por su presencia en los postulados adoptados del discurso.

En tanto que Euclides intentó una clase de definición explícita de los términos *punto, recta* y *plano,* por ejemplo, Pasch aceptó éstos como primitivos, o irreducibles, en su desarrollo de la geometría euclidiana; sólo los consideró definidos implícitamente por las proposiciones básicas que él admitió como postulados en su exposición. Estas proposiciones básicas admitidas fueron descritas por Pasch como *nucleares.* Aunque el origen de las

proposiciones nucleares podía hallarse en consideraciones empíricas, Pasch resaltó que debían enunciarse sin considerar ninguna significación empírica. Declaró que la creación de una ciencia verdaderamente deductiva demanda que todas las deducciones lógicas deban ser independientes de cualesquiera significados que pudieran relacionarse con los diversos conceptos. De hecho, si se hace necesario en un punto de la construcción de una demostración referirse a ciertas interpretaciones de los términos básicos, entonces esto constituye una evidencia suficiente de que la demostración es lógicamente inadecuada. Por otra parte, manteniendo todo el trabajo puramente formal, pueden obtenerse diversas aplicaciones del discurso asignando diferentes significados adecuados a los términos primitivos que se emplean. Desde este punto de vista, la geometría euclidiana es esencialmente un sistema simbólico cuya validez y posibilidad de mayor desarrollo no dependen de ninguno de los significados específicos dados a los términos básicos empleados en sus postulados; la geometría euclidiana se reduce a un puro ejercicio de sintaxis lógica. Donde parece que Euclides ha sido guiado por su imaginación visual, y sujeto así a hacer suposiciones tácitas, Pasch intenta evitar este peligro de error considerando deliberadamente a la geometría como un sistema puramente hipoteticodeductivo. Pasch influyó profundamente en el pensamiento postulacional de la geometría y en sus obras posteriores de este campo intentó mantener los estándares o normas de rigor que él había introducido.

Después de Pasch, el matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) dio, en 1889, un nuevo desarrollo postulacional de la geometría euclidiana. Como Pasch, Peano basó su exposición en ciertos términos primitivos, entre los cuales hay un ente llamado "punto" y una relación de situación entre puntos designada por "entre". Desde muchos puntos de vista, la obra de Peano es principalmente una traducción del tratado de Pasch en la notación de una lógica simbólica que Peano introdujo al mundo matemático. En la versión de Peano no se encuentra empirismo; su geometría es puramente formalista en virtud de que se construye como un cálculo de relaciones entre variables. Aquí tenemos la última capa de protección de los matemáticos contra el peligro del exceso de familiaridad con la materia. Hemos visto que Euclides, trabajando con diagramas visuales en un campo de estudio con el que estaba muy familiarizado, inconscientemente hizo muchas suposiciones encubiertas que no estaban garantizadas por sus axiomas y postulados. Para protegerse de un prejuicio semejante, Peano concibió la idea de simbolizar sus términos primitivos y sus procedimientos lógicos de razonar. Seguramente, si uno ha de decir, "Dos x determinan una y", en lugar de, "Dos puntos determinan una recta", es probable que no sea influido por nociones preconcebidas acerca de "puntos"

y "rectas", y si se empleara una lógica simbólica en el razonamiento, uno no caería tan probablemente en sofismas que provienen de la resbalosa intuición y otros modos de razonamiento flojo. La deducción de los teoremas se convierte en un procedimiento algebraico en el que sólo se emplean símbolos y fórmulas, y la geometría se reduce a un procedimiento estrictamente formal que es totalmente independiente de cualesquiera interpretaciones de los símbolos que intervienen.

Otro matemático italiano, Mario Pieri (1860-1904), empleó, en 1899, en un estudio de la geometría euclidiana, un enfoque muy distinto del de sus predecesores. Consideró que la materia de su estudio era un agregado de elementos indefinidos llamados "puntos" y un concepto indefinido de "movimiento". Los cinco primeros postulados de Pieri indican el importante papel asignado al concepto de movimiento. Son:

1) *Hay un agregado dado,* S, *de puntos que contienen por lo menos dos miembros distintos.*

2) *Un movimiento establece un pareado de los puntos de* S *de modo que a cada punto* P *de* S *corresponda algún otro* P′ *de* S. *Para cada movimiento que establezca una correspondencia entre los puntos* P *de* S *y los* P′ *de* S, *hay un movimiento inverso que establece una correspondencia entre los puntos* P′ *de* S *y los* P *de* S.

3) *La resultante de dos movimientos efectuados sucesivamente es equivalente a un solo movimiento.*

Como consecuencia de los postulados 2 y 3, el movimiento equivalente a un movimiento seguido por su inverso es uno que hace que cada punto de S corresponda a sí mismo, o, en otras palabras, que deje fijo a cada punto de S. Este movimiento se llama *movimiento idéntico*. Un movimiento que no sea idéntico se llama *movimiento efectivo*.

4) *Para dos puntos distintos,* A *y* B *existe un movimiento efectivo que deja a* A *y a* B *fijos. Este movimiento puede considerarse como uno de rotación alrededor de dos puntos* A *y* B.

5) *Si hay un movimiento efectivo que deja los puntos* A, B y C *fijos, entonces todo movimiento que deja a* A *y a* B *fijos también deja fijo a* C.

Como resultado del postulado 5, es posible ahora definir una recta determinada por dos puntos A y B: "La *recta* AB es el agregado de puntos que permanece fijo en un movimiento efectivo que deja a A y a B fijos".

Aunque el tratamiento de Pieri de la geometría euclidiana no tuvo amplia aceptación, el desarrollo de ciertas nociones modernas es evidente en su trabajo. Tenemos, por ejemplo, la idea de *transformación* o *mapeo*. Los movimientos de Pieri son las isometrías directas, o sea, desplazamientos rígidos que mapean el conjunto S de todos los puntos del espacio sobre sí mismos, y Pieri estaba considerando la geometría euclidiana como el estu-

dio de las propiedades y relaciones de las configuraciones de puntos que permanecen invariantes en un grupo de isometrías directas. Esta idea se había generalizado antes, en el famoso programa Erlanger, para formar la base de la notable codificación de geometrías de Felix Klein. Incidentalmente deberá observarse que la idea de Pieri del movimiento puede adaptarse elegantemente a las demostraciones euclidianas por superposición.

El moderno tratamiento postulacional de la geometría euclidiana que ha recibido la aceptación más amplia se debe al eminente matemático alemán David Hilbert (1862-1943). El profesor Hilbert dio varias conferencias sobre los fundamentos de la geometría euclidiana en la Universidad de Gotinga durante el período de invierno de 1898-1899. Estas conferencias se reordenaron y publicaron en un delgado volumen en junio de 1899, bajo el título de *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos de la Geometría). Esta obra, en sus diversas revisiones mejoradas, es en la actualidad clásica en su campo; ha hecho más que cualquier otro trabajo simple desde el descubrimiento de la geometría no euclidiana para promover el método postulacional moderno y para dar forma al carácter de gran parte de la matemática actual. La influencia de este libro fue inmediata. Una edición francesa apareció poco después de la publicación alemana, y una versión inglesa, traducida por E. J. Townsend, apareció en 1902. La obra tuvo siete ediciones alemanas durante la vida del autor, apareciendo la séptima edición en 1930.* Desarrollando un conjunto de postulados para la geometría euclidiana que, en esencia, no se separan mucho de los propios de Euclides y empleando un mínimo de simbolismo, Hilbert tuvo éxito para convencer a los matemáticos, en mayor grado del que tuvieron Pasch y Peano, de la naturaleza puramente hipoteticodeductiva de la geometría. Pero la influencia de la obra de Hilbert fue más allá de esto, pues, apoyada por la gran autoridad matemática del autor, implantó firmemente el método postulacional no sólo en el campo de la geometría, sino esencialmente también en todas las demás ramas de las matemáticas. El estímulo para el desarrollo de los fundamentos de las matemáticas proporcionado por el pequeño libro de Hilbert es difícil de sobrestimar. Faltándole el extraño simbolismo de los trabajos de Pasch y Peano, el de Hilbert puede leerse, en gran parte, por cualquier alumno inteligente que estudie geometría al nivel medio.

Mientras que Euclides hizo una distinción entre "axioma" y "postulado", los matemáticos modernos consideran estos dos términos como sinónimos y designan todas las proposiciones supuestas de un discurso lógico por uno u otro de ellos. Desde este punto de vista, el tratamiento de

* Una octava edición alemana, revisada y ampliada por Paul Bernays, apareció en 1956, y una novena edición alemana, por Bernays, en 1961.

Hilbert de la geometría euclidiana plana y del espacio reposa en 21 axiomas o postulados, y éstos contienen seis términos primitivos, o indefinidos. Por simplicidad, sólo consideraremos los postulados del conjunto de Hilbert que se aplican a la geometría *plana.* En esta limitación hay 15 postulados y cinco términos primitivos.

Los términos primitivos en el tratamiento de Hilbert de la geometría euclidiana plana son *punto, línea* (en su significación de *línea recta), en* (una relación entre un punto y una recta), *entre* (una relación entre un punto y un par de puntos) y *congruente* (una relación entre pares de puntos y entre configuraciones llamadas *ángulos,* que se definen explícitamente en el tratamiento). Por simplicidad de lenguaje, la frase "el punto *A* está en la recta *m*" se enuncia a menudo alternativamente por las frases equivalentes "la recta *m* pasa por el punto *A*" o "la recta *m* contiene al punto *A*".

En el Apéndice 2 se dan, para fines de estudio y para consulta futura, los 15 postulados de Hilbert de la geometría plana. El lector observará que los postulados se entremezclan con definiciones ocasionales cuando son necesarias. Los enunciados de los postulados se han tomado, con algunas ligeras modificaciones para aclarar, de la séptima edición (1930) del *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert. Siguiendo a Hilbert, los postulados se presentan en ciertos grupos relacionados.

¡En estos quince postulados descansa la extensa materia de la geometría plana euclidiana! Es una tarea demasiado larga para que desarrollemos apreciablemente aquí la geometría a partir de estos postulados, pero añadiremos algunas palabras referentes al significado de algunos de ellos.

Los postulados del primer grupo definen implícitamente la idea expresada por el término primitivo "en" y establecen una relación entre los dos entes primitivos, "puntos" y "rectas".

Los postulados del segundo grupo fueron estudiados primero por Pasch, y definen implícitamente la idea expresada por el término primitivo "entre". En particular, nos aseguran la existencia de un número infinito de puntos en una recta y que la recta no termina en ningún punto, y garantizan que el origen de puntos de una recta es en serie más bien que cíclico. El postulado II–4 (postulado de Pasch) difiere de los otros postulados del grupo, pues, como intervienen en él puntos que no están todos en la misma recta, da información acerca del plano como un todo. Los postulados de orden son de interés histórico por cuanto que Euclides se equivocó completamente al no considerar ninguno de ellos. Esta omisión seria por parte de Euclides es la que permite, utilizando sólo la lista de suposiciones de Euclides, deducir paradojas que resultan al aplicar un razonamiento sano a figuras mal dibujadas.

Los postulados del tercer grupo definen implícitamente la idea expresada por el término primitivo "congruente" cuando se aplican a pares de puntos y a ángulos. Estos postulados se presentan en orden para salvar la necesidad de tratar con el concepto de movimiento. Por ejemplo, es interesante observar cómo, en el postulado III–6, Hilbert introduce la congruencia de triángulos sin emplear el método de Euclides de superposición, aún común en muchos textos de secundaria.

El postulado de las paralelas de Playfair aparece como el único postulado del grupo IV; es, por supuesto, equivalente al postulado de las paralelas de Euclides. Empleando los postulados de los tres primeros grupos se puede demostrar que existe por lo menos una recta que pasa por el punto dado A y no corta a la recta dada m.

El primer postulado del último grupo (los postulados de Arquímedes) corresponde al procedimiento familiar de estimar la distancia de un punto de una recta a otro empleando una vara de medir; garantiza que si empezamos en uno de los puntos y colocamos hacia el segundo punto una sucesión de distancias iguales (iguales a la longitud de la vara de medir), pasaremos finalmente por dicho segundo punto. De este postulado puede hacerse que dependa toda la teoría de la medición y, en particular, la teoría de Euclides de la proporción. El postulado final (el postulado de completo) no se necesita para la deducción de los teoremas de la geometría euclidiana, pero hace posible establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta y el conjunto de todos los números reales, y es necesario para el uso libre del sistema de números reales en la geometría analítica, o sea, de coordenadas. Puede demostrarse que, en presencia de los otros trece postulados, estos dos últimos son equivalentes al postulado de Dedekind (véase el problema 8.1–2) y, por consiguiente, si lo deseáramos, podrían sustituirse por este postulado.

Hilbert logró considerablemente más, en su *Grundlagen der Geometrie,* que el solo establecimiento de un conjunto satisfactorio de postulados para la geometría euclidiana. Para demostrar la compatibilidad lógica y la independencia parcial de sus postulados, Hilbert tuvo que idear muchos modelos interesantes, o interpretaciones, para varios subconjuntos de los postulados. Esto equivalía a introducir varios sistemas nuevos de geometría y a crear varias extraordinarias álgebras de segmentos. La influencia de algunos postulados y teoremas importantes en el desarrollo de la geometría euclidiana se demuestra claramente en su obra, y se ilustran en ella ejemplos de varias clases de geometrías no euclidianas. Así, para demostrar la independencia del postulado de Arquímedes de los demás postulados del tratamiento, se ofrece un ejemplo de un sistema no arquimediano, en el que se demuestra que se verifican todos los postulados, excepto el de Arquímedes. También

desarrolla en su obra una teoría de la proporción y otra de las áreas que son independientes del postulado de Arquímedes. Estas investigaciones acompañantes de Hilbert inauguraron virtualmente el estudio en el siglo veinte de la geometría abstracta y tuvieron éxito en convencer a muchos matemáticos de la naturaleza hipoteticodeductiva de las matemáticas. En la implantación del método postulacional en casi todas las matemáticas desde 1900, la *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert representa un definido mojón de referencia o guía en la historia del pensamiento matemático.

Otros tratamientos postulacionales de la geometría euclidiana siguieron al esfuerzo de Hilbert. En 1904, el matemático norteamericano Oswald Veblen (1880-1960) proporcionó un nuevo conjunto de postulados en el que sustituyó la noción primitiva de "entre", como la utilizaron Peano y Hilbert, por una relación primitiva, más prevalente de "orden".* Con esta nueva relación primitiva, los términos "recta", "plano", "en" y "congruente" pueden recibir una definición explícita y, por tanto, la lista de términos primitivos puede reducirse a sólo dos, es decir, "punto" y "orden". Hay un sentimiento entre los matemáticos de que cuanto menor sea el número de términos primitivos de un desarrollo postulacional, más estéticamente agradable será la exposición de dicho desarrollo, principio que fue realzado por Peano. Un segundo estudio de los fundamentos de la geometría euclidiana fue hecho por Veblen en 1911, en el cual su tratamiento original fue ligeramente revisado para que concordara con algunas ideas de R. L. Moore.†

Una combinación muy satisfactoria de los postulados de Hilbert y de Veblen ha sido empleada por Gilbert de B. Robinson.‡ Los postulados de Robinson son esencialmente los de Veblen de orden combinados con los de Hilbert de congruencia y continuidad. En 1913, E. V. Huntington (1874-1952) ofreció un tratamiento de geometría euclidiana tridimensional basada en la "esfera" y la "inclusión" (una esfera que está dentro de otra) como términos primitivos.§ Este extraordinario enfoque ejemplifica el hecho de que es posible caracterizar la geometría euclidiana por sistemas de postulados que son superficialmente muy distintos unos de otros.

* Oswald Veblen, "A system of axioms for geometry", *Transactions of the American Mathematical Society,* 5 (1904), 343-384.

† Oswald Veblen, "The foundations of geometry", en *Monographs on Topics of Modern Mathematics Relevant to the Elementary Field,* editado por J. W. A. Young. Nueva York: Dover Publications, Inc., 1955.

‡ G. de B. Robinson, *The Foundations of Geometry,* segunda edición. Mathematical Expositions, núm. 1. Toronto: University of Toronto Press, 1946.

§ E. V. Huntington, "Un conjunto de postulados de geometría abstracta, expresados en función de la relación simple de inclusión", *Mathematische Annalen,* 73 (1913), 522-559. Véase también G. de B. Robinson, *ob. cit.,* Apéndice, págs. 157-160.

Un excelente y detallado examen postulacional abstracto de la geometría euclidiana apareció en 1927 en una obra de Henry George Forder.† En ella encontramos muchos conjuntos de postulados alternativos comparados entre sí. Por ejemplo, Forder consideró nueve postulados de las paralelas, que se diferencian en la firmeza de sus suposiciones. Adoptando un firme postulado de las paralelas, y utilizando el de Dedekind como postulado de continuidad, Forber da un conjunto de postulados para la geometría euclidiana basados sólo en los dos términos primitivos "punto" y "orden". También da un tratamiento abstracto de un conjunto de postulados de 1909 de Pieri que está basado en los dos términos primitivos "punto" y "congruencia".

El que sea o no conveniente intentar un tratamiento postulacional riguroso de la geometría euclidiana a nivel de enseñanza media, es cuestión de opinión pedagógica. George Bruce Halsted hizo un esfuerzo, que no tuvo éxito, en 1904, cuando publicó un texto de geometría elemental basado en el conjunto de postulados de Hilbert.* Más éxito, y seguramente vale la pena examinarlo, tuvo un intento hecho en 1940 por los profesores George David Birkhoff y Ralph Beatley, de la Universidad de Harvard.‡ En él se explicó un curso, factible para la enseñanza a nivel medio de la geometría euclidiana plana, a partir de cinco postulados basados en una habilidad para medir segmentos rectilíneos y ángulos. Aunque por motivos pedagógicos, ciertos detalles matemáticos y lógicos más sutiles no se consideran o se pasan por alto, el trabajo parte de una presentación matemática rigurosa que se hizo anteriormente por Birkhoff.§

Aproximadamente desde 1960 muchos autores y grupos de escritores han emprendido la tarea de producir material de texto para la geometría a nivel medio en el que ésta se desarrolla rigurosamente a partir de una base postulacional. En estos intentos se adopta o bien el conjunto de postulados de Hilbert o bien el conjunto de postulados de Birkhoff (a veces ligeramente modificado o aumentado).

† H. G. Forder, *The Foundations of Euclidean Geometry*. Nueva York: Cambridge University Press, 1927.

* G. B. Halsted, *Rational Geometry*, Nueva York: John Wiley and Sons, Inc., 1904. Algunas críticas lógicas fueron hechas por Halsted en 1907 en una segunda edición revisada completamente; esta edición se ha traducido al francés.

‡ G. D. Birkhoff y R. Beatley, *Basic Geometry*, Chicago: Scott, Foresman and Company, 1940.

§ G. D. Birkhoff, "Un conjunto de postulados para la geometría plana, basados en la regla y el transportador", *Annals of Mathematics*, 33 (1932), 329-345.

PROBLEMAS

8.2–1 a) Considérense las siguientes definiciones tomadas de un texto de geometría elemental:

1) Las *diagonales* de un cuadrilátero son los dos segmentos rectilíneos que unen los dos pares de vértices opuestos del mismo.

2) Son *rectas paralelas* las que están en el mismo plano y nunca se cortan, por más que se prolonguen en uno u otro sentido.

3) Un *paralelogramo* es un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos.

Ahora, sin utilizar ninguna de las palabras con cursivas anteriores, redáctese en otra forma la proposición "Las diagonales de un paralelogramo se bisecan".

b) Por medio de definiciones explícitas adecuadas redúzcase la siguiente oración a una que sólo contenga diez palabras: "Los asientos móviles con cuatro patas y un respaldo fueron restaurados a un estado sano por la persona que cuida el edificio".

Estos ejercicios ilustran la conveniencia de las definiciones explícitas.

8.2–2 Búsquense las siguientes palabras en un diccionario normal y analícense hasta que la cadena circular se haya establecido: **a)** muerte, **b)** ruidosamente, **c)** recta (en el sentido matemático).

8.2–3 En cada uno de los siguientes razonamientos ¿es la conclusión dada una deducción válida del par de premisas?

a) Si hoy fuera sábado, mañana sería domingo.
Pero mañana será domingo.
Por tanto, hoy es sábado.

b) Los alemanes son buenos bebedores.
Los alemanes son europeos.
Por tanto, los europeos son buenos bebedores.

c) Si a fuera b, entonces c sería d.
Pero c es d.
Por tanto, a es b.

d) Todas las a son b.
Todas las a son c.
Por tanto, todas las c son b.

Estos ejercicios ilustran cómo una persona puede admitir los significados que asocie con las palabras o expresiones para dominar su análisis lógico. Hay mayor tendencia a equivocarse en (a) y (b) que en (c) y (d), que son equivalencias simbólicas de (a) y (b).

8.2–4 Considérese el siguiente conjunto de postulados respecto a ciertos objetos llamados "dabbas" y ciertas colecciones de dabbas llamadas "abbas":

P1: Toda abba es una colección de dabbas.

P2: Existen al menos dos dabbas.

P3: Si p y q son dos dabbas, entonces existe una y sólo una abba que contenga tanto a p como a q.

P4: Si L es una abba, entonces existe una *dabba* que no está en L.

P5: Si L es una abba y p es una dabba que no está en L, entonces existe una y sólo una abba que contiene a p y que no contiene ninguna dabba que esté en L.

a) ¿Cuáles son los términos primitivos de este conjunto de postulados?

b) Dedúzcanse del conjunto de postulados los siguientes teoremas:

1) Toda dabba está contenida en al menos dos abbas.

2) Toda abba contiene al menos dos dabbas.

3) Existen al menos cuatro dabbas distintas.

4) Existen al menos seis abbas distintas.

c) Redáctense de nuevo los postulados interpretando "abba" como "recta" y "dabba" como "punto". Obsérvese que P5 es ahora el postulado de Playfair.

d) Defínase un *kurple* como tres dabbas cualesquiera que no estén contenidas en la misma abba. ¿Cuál será un kurple en la interpretación de la parte (c)?

8.2–5 a) Establézcanse las siguientes consecuencias de los primeros cinco postulados del conjunto de los de Pieri para la geometría euclidiana (como se da en el artículo 8.2).

1) Si C y D son dos puntos distintos de la recta AB, entonces A y B son puntos de la recta CD.

2) Si tres puntos están en una recta, entonces los tres puntos correspondientes a ellos en un movimiento también están en una recta.

b) Pieri define una esfera como sigue: "Si A y B son dos puntos distintos, entonces el agregado de todos los puntos P tales que para cada P haya un movimiento que deje a A fija pero que haga que P corresponda a B se llama *la esfera de centro* A *que pasa por* B". Establézcanse las siguientes consecuencias de esta definición y los cinco primeros postulados de Pieri:

1) Una esfera se transforma en una esfera en todo movimiento.

2) Un movimiento que deja el centro de una esfera fijo transforma a la esfera en sí misma.

3) Si dos esferas con centros A y B sólo tienen un punto, C, en común, entonces los tres puntos A, B, C están en una recta.

c) Trátese de formular, en función del movimiento, una definición adecuada de *perpendicularidad*.

8.2–6 Demuéstrese el teorema que sigue al postulado III-3 del conjunto de postulados de Hilbert para la geometría euclidiana plana.

8.2–7 Dedúzcanse los siguientes teoremas a partir del conjunto de postulados de Hilbert para la geometría euclidiana plana:

a) Si el punto B está entre los puntos A y D, y el C está entre los B y D, entonces C está entre A y D.

b) No hay límite al número de puntos distintos entre dos dados.

c) Si ninguna de dos rectas distintas, a y b, cortan a una tercera, c, entonces a y b no se cortan.

d) Si en un triángulo, dos lados y su ángulo comprendido son congruentes, respectivamente, a dos lados y a su ángulo comprendido de otro triángulo, entonces el tercer lado del primer triángulo es congruente al tercero del segundo.

e) Si en un triángulo, dos ángulos y su lado común son congruentes, respectivamente, a dos ángulos y en lado común de otro triángulo, entonces todos los elementos (ángulos y lados) del primer triángulo son congruentes a los elementos correspondientes del segundo triángulo.

8.2–8 Trátese de deducir la siguiente proposición a partir del conjunto de postulados de Hilbert para la geometría euclidiana plana: Dados cuatro puntos de una recta, siempre es posible indicarlos por las letras A, B, C, D de manera que B esté entre A y C y además entre A y D, y que C esté entre A y D y además entre B y D.

Esta proposición fue incluida como postulado en la primera edición de la obra de Hilbert, pero posteriormente E. H. Moore demostró que es una consecuencia de los demás postulados de Hilbert.*

8.2–9 a) Considérese la configuración formada por la parte positiva del eje x y un arco circular dirigido, C, de radio r, que parte del origen O y tal que dicho arco, C, sea convexo cuando se le mira desde su lado de la derecha. Llamaremos a esta configuración (una clase especial de) *ángulo de cuerno*, y lo representaremos por h. Sea T la tangente dirigida a C en O, y desígnese el ángulo positivo (en sentido contrario al reloj), que va desde el eje positivo x hasta T, por θ. Compararemos dos ángulos de cuerno, h y h', en la siguiente forma. Si $\theta = \theta'$ y $r = r'$, entonces decimos que $h = h'$; si $\theta > \theta'$, decimos que $h > h'$; si $\theta = \theta'$ pero $r < r'$, entonces decimos nuevamente que $h > h'$. Decimos además que $h' = nh$, donde n es un entero positivo si y sólo si $\theta' = n\theta$ y $r' = r/n$. Demuéstrese que nuestros ángulos de

* E. H. Moore, "Sobre los axiomas proyectivos de geometría", *Transactions of the American Mathematical Society,* 3 (1902), 142-158.

cuerno forman ahora un sistema de entidades no arquimediano; esto es: demuéstrese que existen ángulos de cuerno, h y h', tales que $nh < h'$ para todo entero positivo n.

b) Demuéstrese que un ángulo de cuerno en el que $\theta = 0$ puede trisecarse con herramientas euclidianas.

c) Considérense pares de series de potencias de la forma $y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ y $y' = a'_1x + a'_2x^2 + a'_3x^3 + \cdots$, en que los coeficientes sean números reales. Compararemos dos de estas series de potencias en la forma siguiente. Decimos que $y = y'$ si y sólo si $a_i = a'_i$ para toda i; decimos que $y > y'$ si y sólo si existe algún entero positivo, k, tal que $a_1 = a'_1$, $a_2 = a'_2, \cdots, a_k = a'_k, a_{k+1} > a'_{k+1}$. Decimos además que $y' = ny$, en que n es un entero positivo si y sólo si $a'_i = na_i$ para toda i. Demuéstrese que el conjunto de todas las series de potencias de este tipo forman, con las definiciones anteriores, un sistema de entidades no arquimediano. [Esto puede interpretarse como una generalización de la parte (a), en la que los arcos circulares C se han sustituido por curvas analíticas que pasan por O.]

d) Considérese un conjunto de entidades del cual un miembro típico, M, se compone del segmento $-a \leqq x \leqq 0$ $(a > 0)$, y los puntos aislados $x = 1, 2, \cdots, k$. Idéese un método para comparar dichas entidades, y defínase nM, siendo n un entero positivo, de modo que las entidades formen un sistema no arquimediano.

e) Sea $z = a + ib$ y $z' = a' + ib'$ $(a, b, a', b'$ reales e $i = \sqrt{-1})$ dos números complejos. Sea $z = z'$ si y sólo si $a = a'$ y $b = b'$. Si $a > a'$, establézcase que $z > z'$; si $a = a'$, pero $b > b'$, nuevamente establézcase que $z > z'$. Defínase $nz = na + i(nb)$. Demuéstrese que los números complejos, con las definiciones anteriores, forman un sistema de entidades no arquimediano.

f) Demuéstrese que el conjunto de todos los vectores coplanares que parten de un punto O pueden formarse en un sistema no arquimediano.

8.2–10 Se indicó en el artículo 8.2 que Huntington dio un conjunto de postulados para la geometría euclidiana del espacio en el que la *esfera* se toma como elemento primitivo y la *inclusión* como relación primitiva. Trátese de formular, en función de estos términos primitivos, definiciones adecuadas para *punto, segmento, rayo* y *recta*.

8.3 Axiomática formal. El descubrimiento de una geometría no euclidiana (y no mucho después, de un álgebra no conmutativa) condujo a un estudio más profundo y a un refinamiento del procedimiento axiomático que, a partir de la axiomática para la materia de la Grecia antigua, produjeron por evolución la axiomática formal del siglo veinte. Para ayudar a aclarar la diferencia entre las dos formas de axiomática introducimos pri-

mero el concepto moderno de *función proposicional,* la importancia fundamental de la cual fue observada primero por el matemático y filósofo inglés Betrand Russell (1872-).

Considérense los tres enunciados:

1) La primavera es una estación.
2) 8 es un número primo.
3) x es una y.

Cada uno de estos enunciados tiene forma (la misma forma); los (1) y (2) tienen tanto contenido como forma; el (3) sólo tiene forma. Claramente, los enunciados (1) y (2) son proposiciones, una verdadera y otra falsa. Igualmente claro, el enunciado (3) *no* es una proposición, pues como no asegura nada concreto no es ni falso ni verdadero, y una proposición, por definición, es un enunciado que es verdadero o falso. Sin embargo, el (3), aunque no sea una proposición, tiene forma de proposición. Se ha llamado *función proposicional,* pues si en la forma

x es una y

sustituimos las variables x y y por términos de significado concreto, podemos obtener proposiciones: proposiciones verdaderas, si los términos sustituidos verifican la función proposicional, y proposiciones falsas si los términos sustitutos contradicen o falsean la función proposicional. Es evidente que algunas de las sustituciones de x y y convierten la función proposicional en algo que no tiene mucho sentido; dichos significados de las variables se consideran inadmisibles. La forma considerada aquí es una función proposicional de dos variables, y tiene infinidad de verificadores.

Una función proposicional puede contener cualquier número de variables. Un ejemplo que no tiene más que una es: x es un ejemplar de la Librería del Congreso. Aquí x tiene evidentemente tantos valores verificadores como ejemplares haya en la Librería del Congreso. También, evidentemente, la variable x tiene muchos valores que contradicen o falsean el enunciado.

No hay necesidad de que las variables de una función proposicional se representen por símbolos, tales como $x, y, \ldots$; pueden ser palabras corrientes. Así, si en un discurso apareciera un enunciado cuyos términos fueran palabras corrientes sin indicación en cuanto a los sentidos en que dichas palabras habrían de entenderse, entonces en ese discurso el enunciado será realmente una función proposicional más bien que una proposición y, en interés de la claridad, los términos ambiguos o indefinidos podrían sustituirse mejor por símbolos tales como $x, y, \ldots$

Con la idea de una función proposicional firmemente en el pensamiento, volvamos a la exposición del procedimiento axiomático. Recordaremos que

en cualquier discurso lógico, en un intento de que sea claro, se tratan de definir explícitamente los elementos del discurso, las relaciones entre estos elementos y las operaciones que han de realizarse con ellos. No obstante, dichas definiciones han de emplear otros elementos, relaciones y operaciones, y éstos también están sujetos a definiciones explícitas. Si éstos se definen, lo tienen que ser nuevamente con referencia a más elementos, relaciones y operaciones. Tenemos dos caminos abiertos; o bien la cadena de definiciones ha de cortarse en algún punto, o bien tiene que ser circular. Como la circularidad no se tolera en un discurso lógico, las definiciones deben llevarse a cerrarse en algún punto; por tanto, es necesario que a uno o más elementos, relaciones y operaciones no se les dé definición explícita. Estos se conocen como *términos primitivos* del discurso. Igualmente, hay un esfuerzo para deducir lógicamente los enunciados del discurso y nuevamente, para empezar y evitar además el círculo vicioso, uno o más de los enunciados deben permanecer completamente *no demostrados*. Estos se conocen como *postulados* (o axiomas, o enunciados primarios) del discurso. Luego, claramente, un discurso lógico tal como lo hemos considerado debe conformar al siguiente patrón.

PATRÓN DE AXIOMÁTICA FORMAL

A) El discurso contiene un conjunto de términos técnicos (elementos, relaciones entre elementos, operaciones a realizarse con los elementos) que deliberadamente se eligen como términos indefinidos. Estos son los *términos primitivos* del discurso.

B) Todos los demás términos técnicos del mismo se definen explícitamente por medio de los términos primitivos.

C) El discurso contiene un conjunto de enunciados relacionados con los términos primitivos que deliberadamente se eligen como enunciados no demostrados. Estos se llaman *postulados, P*, del discurso.

D) Todos los demás enunciados (relacionados con los términos primitivos y los definidos) del discurso se deducen lógicamente de los postulados. Estos enunciados deducidos se llaman *teoremas, T*, del discurso.

E) Para cada teorema, T_i del discurso hay un enunciado correspondiente (que puede o no expresarse formalmente) que asegura que el teorema T_i se implica lógicamente por los postulados P. (A menudo el enunciado correspondiente aparece al final de la demostración del teorema en unas palabras tales como "En consecuencia, el teorema", o "Esto completa la demostración del teorema", etc. En algunos textos de geometría elemental aparece el enunciado al final de la demostración del teorema, como "Q.E.D.", o sea, *quod erat demonstrandum* (= que era lo que se quería demostrar).

Lo primero que hay que observar en el patrón anterior es que los términos primitivos, siendo indefinidos, podrían igualmente sustituirse (si ya no lo han sido) por símbolos como x, y, $\cdots$. Supongamos que se hace esta sustitución. Entonces, los términos primitivos son claramente variables. Lo segundo a observar es que los postulados, P, como son enunciados relacionados con los términos primitivos, son nada menos que funciones proposicionales. Y lo tercero que ha de observarse es que los teoremas T, como no son más que implicaciones lógicas de los postulados P, también son funciones proposicionales. Por tanto, esto nos conduce a un hecho de importancia cardinal, es decir, que una vez que se haya observado que los términos primitivos son variables, tanto los postulados como los teoremas de un discurso lógico no son proposiciones sino funciones proposicionales.

Como los postulados y los teoremas de un discurso lógico son funciones proposicionales, esto es, son enunciados que sólo tienen forma y no contenido, parecería que todo el discurso es algo vacío y completamente desprovisto de verdades o falsedades. Sin embargo, éste no es el caso, pues por (E) del patrón postulacional tenemos el enunciado muy importante,

F) Los postulados P implican los teoremas T.

Ahora bien (F) asegura algo concreto o definido; es verdadero o falso y, por tanto, una proposición: verdadera si los teoremas T se implican o desprenden de hecho por los postulados P, y falso si no lo son. El enunciado (F) es precisamente para lo que el discurso se ha diseñado; es la única meta del discurso y la excusa para hacerlo.

Un discurso conducido según el patrón anterior ha sido llamado, por algunos matemáticos, una *rama de la matemática pura,* y el grandioso total de todas de dichas ramas existentes de la matemática pura, la *matemática pura al día o actual.*

Si, para las variables (los términos primitivos) de una rama de la matemática pura sustituyéramos los términos de significado definido que convierte todos los postulados de la rama en proposiciones verdaderas, entonces el conjunto de términos sustitutos se llama *interpretación* de la rama de la matemática pura. La interpretación convertirá además, siempre que todas las deducciones se hayan realizado correctamente, los teoremas del discurso en proposiciones verdaderas. El resultado de dicha interpretación se llama *modelo* de la rama de la matemática pura.

Un modelo de una rama de la matemática pura se ha llamado *rama de la matemática aplicada,* y el grandioso total de todas las ramas existentes de la matemática aplicada, la *matemática aplicada actual o al día.* Por tanto, la diferencia entre las matemáticas aplicada y pura no es de aplicación y no aplicación, sino más bien de que sea concreta y abstracta. Detrás

de toda rama de la matemática aplicada está una rama de la matemática pura, siendo esta última un desarrollo abstracto de lo que anteriormente fue un desarrollo concreto. Es concebible (y de hecho a menudo es el caso) que una sola rama de la matemática pura pueda tener varios modelos, o sea, ramas asociadas de matemáticas aplicadas. Esta es la característica de "economía" de las matemáticas puras, pues el establecimiento de una rama de la matemática pura automáticamente asegura el establecimiento simultáneo de todas sus ramas de matemática aplicada.

El desarrollo abstracto de alguna rama de matemática pura es un ejemplo de *axiomática formal,* mientras que el desarrollo concreto de una rama dada de matemática aplicada es uno de *axiomática material.* En el primer caso consideramos los postulados antes que cualquier especificación de los términos primitivos, y en el último consideramos los objetos que interpretan los términos primitivos con anterioridad a los postulados. En el primer caso, un postulado es simplemente una suposición básica acerca de algunos términos primitivos indefinidos; en el último caso, un postulado expresa alguna propiedad de los objetos básicos que se toma como inicialmente evidente. Este último es la visión más antigua de un postulado y fue la que mantuvieron los antiguos griegos. Por tanto, para los griegos, se creía que la geometría era un estudio que trataba con una estructura única del espacio físico, en la que los elementos *puntos* y *rectas* se consideraban como idealizaciones de ciertas entidades físicas reales, y en la que los postulados eran enunciados fácilmente aceptados acerca de estas idealizaciones. Desde el punto de vista moderno, la geometría es un estudio puramente abstracto desprovisto de todo significado físico o imaginario.

La noción de la matemática pura da un sentido considerable a la chispeante observación de Bertrand Russell de que "la matemática puede definirse como la materia en que nunca se sabe de lo que se habla, ni si es cierto lo que se dice". También concuerda con el dicho de Henri Poincaré de que la matemática es "la asignación del mismo nombre a cosas distintas", y con la observación de Benjamín Peirce (1809-1880) de que "la matemática es la ciencia que saca conclusiones necesarias".

No debe pensarse, al construir una rama de la matemática pura, que podemos fijar una colección de símbolos para los términos indefinidos y luego dar para postulados un sistema arbitrario de enunciados supuestos acerca de dichos términos. Hay ciertas propiedades requeridas y ciertas deseadas que nuestro sistema de enunciados supuestos (nuestros postulados) deberán tener. De estas propiedades sólo consideraremos aquí la *compatibilidad* y la *independencia.*

Un conjunto de postulados se dice que es *compatible* si no son implicados por el conjunto los enunciados contradictorios. Esta es la propiedad más

importante y fundamental de un conjunto de postulados; sin esta propiedad, dicho conjunto no tiene valor.

El método de más éxito hasta ahora inventado para establecer la compatibilidad de un conjunto de postulados es el de modelos. Recuérdese que se obtiene un modelo de un conjunto de postulados si asignamos significados a los términos primitivos del conjunto que conviertan dichos postulados en enunciados verdaderos acerca de algún concepto. Hay dos tipos de modelos: concretos e ideales. Se dice que un modelo es *concreto* si los significados asignados a los términos primitivos son objetos y relaciones adaptados o tomados del mundo real, en tanto que un modelo se dice que es *ideal* si los significados asignados a los términos primitivos son objetos y relaciones de algún otro sistema de postulados.

Cuando se ha presentado un modelo concreto sentimos que hemos establecido la compatibilidad *absoluta* de nuestro sistema de postulados, pues si se implicaran teoremas contradictorios por nuestros postulados, entonces enunciados contradictorios correspondientes se verificarían en nuestro modelo concreto. Pero nosotros aceptamos que las contradicciones en el mundo real son imposibles.

No siempre es factible tratar de establecer un modelo concreto de un conjunto de postulados. Así, si un conjunto de postulados contiene un número infinito de elementos primitivos, ciertamente sería imposible un modelo concreto, pues el mundo real no contiene un número infinito de objetos. En dichos casos intentaremos establecer un modelo ideal, asignando a los términos primitivos del sistema de postulados, digamos A, conceptos de algún otro sistema de postulados, B, de tal manera que las interpretaciones de los postulados del A sean consecuencias lógicas de los del sistema B. Pero ahora nuestra prueba de compatibilidad del conjunto de postulados A ya no puede reclamarse que sea una prueba absoluta, sino tan sólo una prueba *relativa*. Todo lo que podemos decir es que el conjunto de postulados A es compatible si el de postulados B lo es, y hemos reducido la compatibilidad del sistema A a la de otro sistema B.

La compatibilidad relativa es lo mejor que podemos esperar cuando apliquemos el método de modelos a muchas ramas de las matemáticas, pues muchas de estas ramas contienen un número infinito de elementos primitivos. Esto es cierto, por ejemplo, para la geometría lobachevsquiana plana. No obstante, en el siguiente artículo demostraremos, estableciendo un modelo de la geometría plana lobachevsquiana dentro de la geometría plana euclidiana, que la primera geometría es compatible si la última lo es.

Un postulado de un conjunto de postulados se dice que es *independiente* si no es una consecuencia lógica de los otros postulados del conjunto, y todo el conjunto de postulados se dice que es *independiente* si cada uno de sus

postulados es independiente. La consideración más famosa en la historia de las matemáticas de la independencia de un postulado es la relacionada con el estudio del postulado de las paralelas de Euclides. Durante siglos, los matemáticos tuvieron dificultad para considerar el postulado de las paralelas como independiente de los demás postulados de Euclides (y axiomas), y por ello hicieron intentos repetidos para demostrar que eran consecuencia de estas otras suposiciones. Fue el descubrimiento de la geometría lobachevsquiana no euclidiana, y la prueba final de la compatibilidad relativa de ella, lo que finalmente estableció la independencia del postulado de las paralelas de Euclides. De hecho, no es exageración decir que a la consideración histórica de la independencia del postulado de las paralelas de Euclides se debe la iniciación de todo el estudio de las propiedades de los conjuntos de postulados y, en consecuencia, la formación de gran parte del método axiomático moderno.

Una prueba para la independencia de un postulado consiste en hallar una interpretación de los términos primitivos que no verifican el postulado considerado, pero que sí verifican cada uno de los postulados restantes. Si tenemos éxito en hallar dicha interpretación, entonces el postulado considerado no puede ser una consecuencia lógica de los restantes, pues si lo fuera, la interpretación que convierte todos los demás postulados en proposiciones verdaderas tendría que convertirlo también en una proposición verdadera. Una prueba, entre estas líneas, de la independencia de todo el conjunto de postulados puede evidentemente ser un asunto largo, porque si hay n postulados en el conjunto tendrían que formularse n pruebas distintas (una para cada postulado).

La independencia de un conjunto de postulados no es de ninguna manera necesaria, y un conjunto de postulados no es claramente invalidado sólo porque le falta independencia. Hablando en términos generales, un matemático prefiere que un conjunto de postulados sea independiente, ya que desea construir su teoría sobre una cantidad mínima de suposiciones. Un conjunto de postulados que no sea independiente simplemente es redundante en lo que se refiere a que contiene uno o más enunciados que pueden aparecer como teoremas en lugar de como postulados. A veces, por motivos pedagógicos, puede ser conveniente desarrollar un tema a partir de un conjunto de postulados que no sea independiente (por ejemplo, al desarrollar la geometría plana en la escuela de nivel medio a partir de un fundamento postulacional).

Hay algunos conjuntos de postulados bien conocidos que, cuando se publicaron por primera vez, contenían, sin que se supiera, postulados que no eran independientes. Tal fue la situación con el conjunto original de Hilbert de postulados para la geometría euclidiana. Posteriormente se de-

mostró que este conjunto tiene dos postulados que están implicados por los otros. El hallazgo de estos dos postulados dependientes no invalidó en ninguna forma el sistema de Hilbert; en una enmienda siguiente, estos postulados simplemente se cambiaron a teoremas, y se proporcionaron sus demostraciones.

Análogamente, R. L. Wilder pudo demostrar que el famoso conjunto de ocho postulados de R. L. Moore, que virtualmente inauguró la topología moderna de conjuntos teóricos, podía reducirse a siete por la eliminación del sexto postulado de Moore. La sospecha de que el sexto postulado no era independiente provino de que se vio que la prueba de la independencia de este postulado era falsa, y una investigación subsiguiente para una prueba satisfactoria resultó infructuosa. Por supuesto que la teoría matemática de Moore permaneció intacta a pesar del descubrimiento de Wilder, pero la reducción de un sistema de ocho postulados a otro igualmente efectivo de siete, fue un estímulo estético para el matemático.

PROBLEMAS

8.3–1 a) Constrúyase un ejemplo de una función proposicional que contenga tres variables.

b) Obténganse, por sustituciones adecuadas, tres proposiciones verdaderas a partir de la función proposicional.

c) Obténganse, por sustituciones adecuadas, tres proposiciones falsas a partir de la función proposicional.

8.3–2 Si p, q, r representan proposiciones, demuéstrese que el siguiente conjunto de cuatro enunciados es incompatible:

1) Si q es verdadero, entonces r es falso.

2) Si q es falso, entonces p es verdadero.

3) r es verdadero.

4) p es falso.

8.3–3 Compárese el concepto de compatibilidad e incompatibilidad de un conjunto de ecuaciones simultáneas con el concepto de compatibilidad e incompatibilidad de un conjunto de postulados.

8.3–4 Considérese el siguiente conjunto de postulados, en el que *abeja* y *colmena* son términos primitivos:

P1: Toda colmena es una colección de abejas.

P2: Dos colmenas cualesquiera tienen una y sólo una abeja en común.

P3: Toda abeja pertenece a dos y sólo dos colmenas.

P4: Hay exactamente cuatro colmenas.

Demuéstrese que este conjunto de postulados es absolutamente compatible.

8.3–5 a) Dedúzcanse los siguientes teoremas a partir del conjunto de postulados del problema 8.3–4:

T1: Hay exactamente seis abejas.

T2: Hay exactamente tres abejas en cada colmena.

T3: Por cada abeja hay exactamente una abeja distinta que no está en la misma colmena que ella.

b) Demuéstrese que los postulados P2, P3, P4 del problema 8.3–4 son independientes.

8.3–6 Considérese un conjunto K de elementos indefinidos, que representaremos por minúsculas, y designemos por R una relación diádica indefinida (esto es, una relación que conecta dos elementos) que puede o no verificarse entre un par dado de elementos de K. Si el elemento a de K se relaciona con el b de K por la relación R escribiremos $a\ R\ b$. Ahora admitamos los cuatro siguientes postulados referentes a los elementos de K y a la relación diádica R.

P1: Si a y b son dos elementos distintos de K, entonces $a\ R\ b$ o bien $b\ R\ a$.

P2: Si a y b son dos elementos cualesquiera de K tales que $a\ R\ b$, entonces a y b son distintos.

P3: Si a, b, c son tres elementos cualesquiera de K tales que $a\ R\ b$ y $b\ R\ c$, entonces $a\ R\ c$.

P4: K consiste en exactamente cuatro elementos distintos.

Dedúzcanse los siete siguientes teoremas de los cuatro postulados anteriores.

T1: Si $a\ R\ b$, entonces no tenemos $b\ R\ a$.

T2: Si $a\ R\ b$ y si c es distinto de a, entonces $a\ R\ c$ o bien $c\ R\ b$.

T3: Hay al menos un elemento de K que no está relacionado con R a ningún elemento de K. (Este es un teorema de existencia.)

T4: Hay sólo un elemento de K que no está relacionado con R a ningún elemento de K. (Este es un teorema de unicidad.)

Definición 1. Si $b\ R\ a$, decimos que $a\ D\ b$.

T5: Si $a\ D\ b$ y $b\ D\ c$, entonces $a\ D\ c$.

Definición 2. Si $a\ R\ b$ y no hay ningún elemento c tal que también $a\ R\ c$ y $c\ R\ b$, entonces decimos que $a\ F\ b$.

T6: Si $a\ F\ c$ y $b\ F\ c$, entonces a y b son idénticos.

T7: Si $a\ F\ b$ y $b\ F\ c$, entonces no tenemos $a\ F\ c$.

Definición 3. Si $a\ F\ b$ y $b\ F\ c$, entonces decimos que $a\ G\ c$.

8.3–7 a) Establézcase la compatibilidad absoluta del conjunto de postulados del problema 8.3–6 por medio de cada una de las siguientes interpretaciones:

1. Sea K compatible con un hombre, su padre, el padre de su padre y el padre del padre de su padre, e indiquemos por $a\ R\ b$ que "a es un antecesor de b".

2. Sea K compatible con cuatro puntos distintos en una recta horizontal e indiquemos por $a\ R\ b$ que "a está a la izquierda de b".

3. Sea K compatible con los cuatro enteros 1, 2, 3, 4 e indiquemos por $a\ R\ b$ que "$a < b$".

b) Escríbanse los enunciados de los teoremas y definiciones del problema 8.3–6 para cada una de las interpretaciones de la parte (a), obteniendo así tres ramas de matemática aplicada a partir de una rama de matemática pura.

8.3–8 Establézcase la independencia del conjunto de postulados del problema 8.3–6 por medio de las cuatro siguientes interpretaciones parciales:

1. Sea K compatible con dos hermanos, su padre y el padre de su padre, e indiquemos por $a\ R\ b$ que "a es un antecesor de b".

2. Sea K compatible con los cuatro enteros 1, 2, 3, 4 e indiquemos por $a\ R\ b$ que "$a \leqq b$".

3. Sea K compatible con los cuatro enteros 1, 2, 3, 4 e indiquemos por $a\ R\ b$ que "$a \neq b$".

4. Sea K compatible con los cinco enteros 1, 2, 3, 4, 5 e indiquemos por $a\ R\ b$ significa "$a < b$".

8.3–9 Demuéstrese que, en el problema 8.3–6, P1, T1, P3, P4 constituyen un conjunto de postulados equivalentes a P1, P2, P3, P4.

8.3–10 Sea S un conjunto de elementos y F una relación diádica que satisfaga los siguientes postulados:

P1: Si a y b son elementos de S y si $b\ F\ a$, entonces no tenemos $a\ F\ b$.

P2: Si a es un elemento de S, entonces hay al menos un elemento b de S tal que $b\ F\ a$.

P3: Si a es un elemento de S, entonces hay al menos un elemento b de S tal que $a\ F\ b$.

P4: Si a, b, c son elementos de S tales que $b\ F\ a$ y $c\ F\ b$, entonces $c\ F\ a$.

P5: Si a y b son elementos de S tales que $b\ F\ a$, entonces existe al menos un elemento c de S tal que $c\ F\ a$ y $b\ F\ c$.

Demuéstrese que el enunciado "Si a es un elemento de S, entonces hay al menos un elemento b de S, distinto de a, tal que no tenemos $b\ F\ a$ ni $a\ F\ b$", es tanto compatible con los postulados anteriores como independiente de ellos.

(El conjunto de postulados, aumentado con el enunciado anterior, se ha utilizado en la teoría de la relatividad, donde los elementos de S se interpretan como *instantes* del tiempo y F significa *"sigue a"*.*)

8.4 El modelo de Poincaré y la compatibilidad de la geometría plana lobachevsquiana. Un conjunto de postulados satisfactorios para la geometría plana lobachevsquiana puede obtenerse a partir del conjunto de postulados de Hilbert para la geometría plana euclidiana simplemente sustituyendo el postulado de las paralelas (postulado IV–1) por

IV′–1 *Por un punto dado* A *que no está en una recta* m *pasan al menos dos rectas que no cortan a la* m.

Se han hecho desarrollos de la geometría plana lobachevsquiana utilizando dicho conjunto de postulados como fundamento.†

Es nuestro fin, en este artículo, demostrar que la geometría plana lobachevsquiana es compatible si la geometría plana euclidiana lo es. Para lograrlo representaremos los términos primitivos de la geometría plana lobachevsquiana por algunas entidades de la plana euclidiana que, cuando sustituyen a los términos primitivos en los postulados de la geometría plana lobachevsquiana, convertirán estos postulados en los teoremas de la geometría plana euclidiana. En otras palabras, daremos una interpretación de la geometría plana lobachevsquiana dentro de la geometría plana euclidiana. La interpretación que emplearemos fue ideada por Henri Poincaré, y conduce al llamado *modelo de Poincaré* de la geometría plana lobachevsquiana.

Elegiremos una circunferencia fija, Σ, en el plano euclidiano y la llamaremos *circunferencia fundamental,* y luego estableceremos en el plano euclidiano las siguientes representaciones de los términos primitivos de la geometría plana lobachevsquiana (fig. 8.4a). Para claridad, designamos estas representaciones por medio de letras negras.

punto: punto en el interior de Σ

recta: la parte interior a Σ de cualquier "circunferencia" (recta o circunferencia) ortogonal a Σ

punto en una recta (recta que pasa por un punto, recta que contiene un punto): la interpretación es evidente

punto entre dos puntos: la interpretación es evidente

Definición. **longitud de un segmento** $AB = \log (AB,TS) = \log [(AT/BT)(BS/AS)]$, donde S y T son los puntos en que la "circunferencia" que contiene al **segmento** AB corta a Σ, siendo puestos S y T de modo que A

* Véase A. A. Robb, *A Theory of Time and Space.* Nueva York: Cambridge, University Press, 1914.

† Véase, por ejemplo, G. Verriest, *Introduction a la géométrie non-Euclidienne par la méthode élémentaire.* París: Gauthier-Villars, 1951.

quede entre S y B. Deberá observarse que $(AB,TS) > 1$, de donde $\log (AB,TS) > 0$.

Definición. **medida de un ángulo entre dos rectas que se cortan** = medida en radianes del ángulo entre las dos "circunferencias" que contienen a las dos **rectas**.

segmentos congruentes: segmentos de igual **longitud**

ángulos congruentes: ángulos de igual **medida**

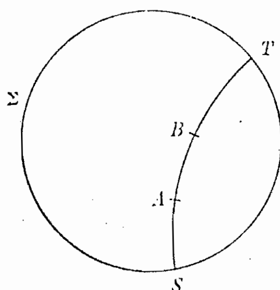


Fig. 8.4a

Demostraremos ahora que, con las representaciones anteriores, los postulados de la geometría plana lobachevsquiana se convierten en teoremas en la geometría plana euclidiana; se observará que muchos de los teoremas resultantes son evidentes.

GRUPO I: POSTULADOS DE CONEXIÓN

I–1. *Hay una y sólo una* **recta que pasa por** *dos* **puntos** *distintos cualesquiera.*

Este es el teorema 2.7.5.

I–2. *Toda* **recta contiene** *al menos dos* **puntos** *distintos y para cada* **recta** *hay al menos un* **punto** *que no está* **en ella.**

Evidente.

GRUPO II: POSTULADOS DE ORDEN

II–1. *Si el* **punto** C *está* **entre los puntos** A *y* B, *entonces* A, B, C *están todos* **en** *la misma* **recta,** *y* C *está* **entre** B *y* A, *y* B *no está* **entre** C *y* A, *y* A *no está* **entre** C *y* B.

Evidente.

II–2. *Para dos* **puntos** *distintos cualesquiera,* A *y* B, *hay siempre un* **punto** C *que está* **entre** A *y* B, *y un* **punto** D *que es tal que* B *está* **entre** A *y* D.

Evidente.

II–3. *Si* A, B, C *son tres* puntos *distintos cualesquiera que están* en *la misma* recta, *entonces uno de los* puntos *está* entre *los otros dos.*

Evidente.

II–4. (Postulado de Pasch) *Una* recta *que* corte *a un* lado *de un* triángulo *pero que no* pase por *ninguno de sus* vértices *tiene también que* cortar *a otro* lado *del* triángulo.

Evidente, debido a I–1.

GRUPO III: POSTULADOS DE CONGRUENCIA

III–1. *Si* A *y* B *son* puntos *distintos y si* A′ *es un* punto *que está* en *la* recta m, *entonces hay dos y sólo dos* puntos, B′ *y* B″, *que están* en m *tales que el par de* puntos A′ B′ *sea* congruente *con el par* A, B *y el par de* puntos A′, B″ *sea* congruente *con el par* A, B; *además,* A′ *está* entre B′ *y* B″.

Observaremos (fig. 8.4b) que $(A'T'/B'T')(B'S'/A'S')$ aumenta continuamente desde 1 a ∞ a medida que B' se mueve sobre m desde A' hasta T'. Análogamente, $(A'S'/B''S')(B''T'/A'T')$ aumenta continuamente des-

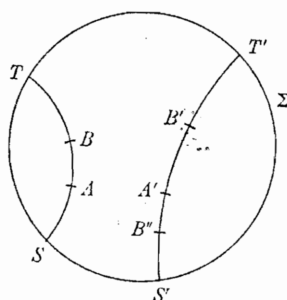


Fig. 8.4b

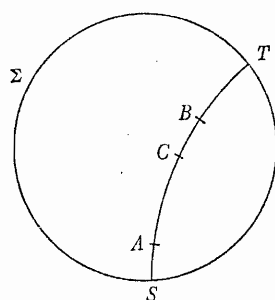


Fig. 8.4c

de 1 hasta ∞ a medida que B'' se mueve sobre m desde A' hasta S'. Se deduce que la longitud $A'B'$ y la longitud $A'B''$ aumentan continuamente desde 0 hasta ∞ en los dos casos. Por consiguiente, hay posiciones únicas de B' y B'' tales que longitud $A'B'$ = longitud de $A'B''$ = longitud AB.

III–2. *Si dos pares de* puntos *son* congruentes *al mismo par de* puntos, *entonces son* congruentes *entre sí.*

Evidente.

III–3. *Si el* punto C *está* entre los puntos A *y* B *y el* punto C′ *está* entre los puntos A′ *y* B′, *y si el par de* puntos A, C *es* congruente *al par* A′, C′, *y el par de* puntos C, B *es* congruente *al* C′, B′, *entonces el par de* puntos A, B *es* congruente *al* A′, B′.

Pues tenemos (fig. 8.4c)

$$\begin{aligned}\text{longitud } AB &= \log[(AT/BT)(BS/AS)]\\ &= \log[(AT/CT)(CS/AS)(CT/BT)(BS/CS)]\\ &= \log[(AT/CT)(CS/AS)] + \log[(CT/BT)(BS/CS)]\\ &= \text{longitud } AC + \text{longitud } CB.\end{aligned}$$

Análogamente, longitud $A'B'$ = longitud $A'C'$ + longitud $C'B'$. Pero longitud AC = longitud $A'C'$ y longitud CB = longitud $C'B'$. Por consiguiente, longitud AB = longitud $A'B'$, y AB es congruente con $A'B'$.

III–4. *Si* BAC *es un* ángulo *cuyos* lados *no están en la misma* recta, *y si* A′ *y* B′ *son dos* puntos *distintos, entonces hay dos y sólo dos* rayos *distintos* A′C′ *y* A′C″ *tales que el* ángulo B′A′C′ *sea* congruente *al* ángulo BAC *y el* ángulo B′A′C″ *sea* congruente *al* BAC; *además, si* D′ *es un* punto *que está en el* rayo A′C′ *y* D″ *es un* punto en *el* rayo A′C″, *entonces el* segmento D′D″ corta *a la* recta *determinada por* A′ *y* B′.

Esta es una consecuencia del teorema 2.7.6.

III–5. *Todo* ángulo *es* congruente *a sí mismo.*

Evidente.

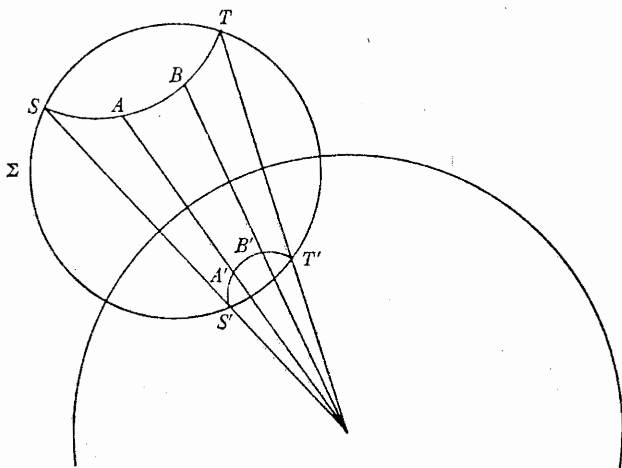


Fig. 8.4d

Lema. *La* longitud AB *es invariante ante la inversión respecto a una circunferencia ortogonal a* Σ.

Sean A', B' los inversos de A, B respecto a una circunferencia ortogonal a Σ y obsérvese que A', B' está en el interior de Σ. Entonces (fig. 8.4d)

$$\begin{aligned}\text{longitud } A'B' &= \log\,(A'B', T'S')\\ &= \log\,(AB, TS) \quad \text{(por el teorema 3.4.21)}\\ &= \text{longitud } AB.\end{aligned}$$

III–6. *Si dos* lados *y su* ángulo comprendido *de un* triángulo *son* congruentes, *respectivamente, a dos* lados *y su* ángulo comprendido *de otro* triángulo, *entonces cada uno de los* ángulos *restantes del primer* triángulo *es* congruente *al* ángulo *correspondiente del segundo* triángulo.

Considérese un triángulo $O'P'Q'$ donde, sin perder generalidad, supongamos que O' no es el centro O de Σ (fig. 8.4e) y, además, que las "circunferencias" de los lados $O'P'$ y $O'Q'$ se corten nuevamente en C. Inviértase la figura respecto a C como centro y con una potencia que transforme a Σ en sí misma. Como el tamaño del ángulo se conserva ante la inversión, las "circunferencias" $CP'O'$ y $CQ'O'$ (siendo ortogonales a Σ

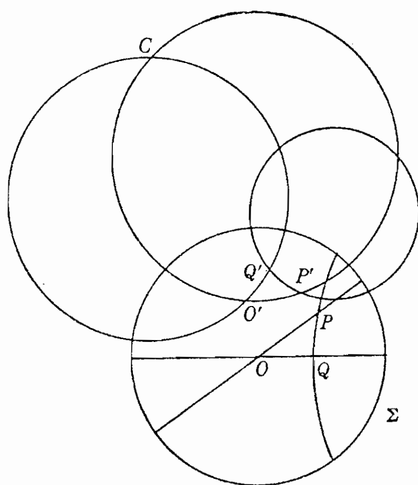


FIG. 8.4e

y pasando por el centro C de inversión) se mapean en dos rectas diametrales de Σ, y el triángulo $O'P'Q'$ se mapea en un triángulo OPQ, donde OP, OQ son rectas radiales de Σ. Como ambas medidas de los ángulos y de las longitudes de los segmentos se conservan ante la inversión, se deduce que los triángulos $O'P'Q'$ y OPQ son congruentes.

Ahora sea $O'_1P'_1Q'_1$ un triángulo en que longitud $O'_1P'_1$ = longitud $O'P'$, longitud $O'_1Q'_1$ = longitud $O'Q'$, y ángulo $P'_1O'_1Q'_1$ = ángulo $P'O'Q'$. Como antes, el triángulo $O'_1P'_1Q'_1$ es congruente al triángulo OP_1Q_1, donde OP_1, OQ_1 son rectas radiales de Σ. Pero el triángulo OP_1Q_1 es congruente (en el sentido euclidiano) al triángulo OPQ. Por consiguiente, el triángulo $O'_1P'_1Q'_1$ es congruente al triángulo $O'P'Q'$.

GRUPO IV: POSTULADO DE LAS PARALELAS

IV'–1. *Por un* punto *dado* A *que no esté* en *una* recta *dada* m pasan *al menos dos* rectas *que no* cortan *a la* recta m.

Supongamos que la "circunferencia" que contiene la recta *m* corta a Σ en *X* y *Y* (fig. 8.4f). Trácense por *A* las únicas "circunferencias" ortogonales a Σ y que pasen, respectivamente, por *X* y *Y*. Estas "circunferencias" son distintas, y de aquí se deduce el resultado deseado.

GRUPO ALTERNATIVO V

V′–1. *Si los* **puntos** *de un* **segmento ordenado** *con origen* A *y extremo* B *se separan en dos clases de modo que*

1) *cada* **punto** *de* AB *pertenezca a una y sólo una de las clases,*

2) *los* **puntos** A *y* B *pertenezcan a distintas clases (que llamaremos, respectivamente,* primera *y* segunda *clases),*

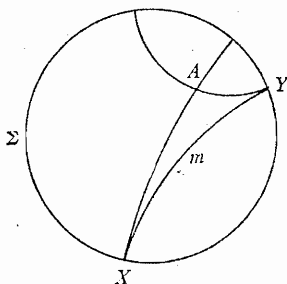


Fig. 8.4f

3) *cada* **punto** *de la primera clase* **preceda** *a cada* **punto** *de la segunda, entonces existe un* **punto** C **en** AB *tal que todo* **punto** *que* **preceda** *a* C *pertenecerá a la primera clase y todo* **punto** *que* siga *a* C *pertenecerá a la segunda clase.*

Inviértase con respecto a un punto *D* que no esté en el **segmento** *AB*, sino en la "circunferencia" que contiene al **segmento** *AB*. Entonces, el **segmento ordenado** *AB* se convierte en un segmento rectilíneo semejantemente ordenado *A′B′*. El lector puede completar fácilmente la demostración.

Podemos considerar ahora que el objeto de este artículo (demostrar que la geometría plana lobachevsquiana es compatible si la geometría plana euclidiana lo es) se ha logrado. Pues, si hubiera alguna incompatibilidad en la geometría plana lobachevsquiana, la habría correspondientemente en la euclidiana del modelo de Poincaré.

Suponiendo que la geometría plana euclidiana sea compatible, no sólo hemos establecido la compatibilidad de la geometría plana lobachevsquiana, sino que además hemos demostrado que el postulado euclidiano de las paralelas es independiente de los demás postulados de la geometría euclidiana; porque en el modelo de Poincaré tenemos una interpretación de

parte de la geometría plana euclidiana que falsifica el postulado de las paralelas euclidiano pero verifica todos sus demás postulados. Si el postulado de las paralelas euclidiano fuera implicado por los demás postulados euclidianos, entonces también tendría que verificarse en el modelo. Como hemos visto que no sucede así, y como hemos supuesto que la geometría euclidiana es compatible, se deduce que el postulado de las paralelas euclidiano no puede ser implicado por los demás postulados euclidianos y, por tanto, es independiente de ellos.

Por supuesto, una demostración satisfactoria de la compatibilidad de la geometría plana euclidiana nunca se ha dado, excepto (como veremos en el segundo volumen de nuestra obra) refiriéndonos como base a los conceptos de la geometría analítica y, en consecuencia, finalmente al sistema de números real, cuya compatibilidad es, a su vez, una cuestión abierta.

PROBLEMAS

8.4–1 Establézcase la interpretación de I–1 invirtiendo la figura con respecto a un punto de Σ.

8.4–2 Demuéstrese cómo la interpretación de I–1 comprueba la interpretación de II–4.

8.4–3 Demuéstrese cómo la interpretación de III–4 es una consecuencia del teorema 2.7.6.

8.4–4 Complétese la demostración de la interpretación de V′–1.

8.4–5 a) Demuéstrese que un cono circular oblicuo tiene secciones circulares cuyos planos no son paralelos al plano de la circunferencia generatriz del cono.

b) Demuéstrese que dos circunferencias en distintos planos, pero que compartan un diámetro común, están relacionadas proyectivamente por una perspectividad paralela.

c) Demuéstrese que existen un número infinito de proyectividades que mapean una circunferencia y su interior sobre la misma circunferencia y su interior.

8.4–6 Describimos un modelo de geometría plana lobachevsquiana que fue ideado por Felix Klein (1849-1929).

Elíjase una circunferencia fija, Σ, en el plano euclidiano y establézcanse las siguientes representaciones de los términos primitivos de la geometría plana lobachevsquiana:

punto: punto en el interior de Σ

recta: cuerda de Σ

punto en una recta: la interpretación es evidente

punto entre dos puntos: la interpretación es evidente

segmentos congruentes: segmentos que pueden mapearse sobre otro por una proyectividad de Σ y su interior sobre sí misma

ángulos congruentes: ángulos que pueden mapearse sobre otro por una proyectividad de Σ y su interior sobre sí misma

Verifíquense, en el modelo de Klein, los postulados de Hilbert para la geometría plana lobachevsquiana.

8.4–7 Demuéstrese que, en el modelo de Klein, podemos definir la **longitud del segmento** AB por log (AB,TS), donde S y T son los puntos en los que la cuerda que contiene el segmento AB corta a Σ, siendo puestos S y T de modo que A esté entre S y B.

8.5 Deducciones del modelo de Poincaré. Si un modelo de un sistema A se ha formado dentro de otro B, es concebible que algunos teoremas del sistema A puedan establecerse más fácilmente demostrando sus equivalentes en el B, especialmente si se está más familiarizado con el sistema B que con el A. Ahora bien, el modelo de Poincaré es un modelo de la geometría plana lobachevsquiana dentro de la geometría plana euclidiana. Como estamos más familiarizados con la euclidiana que con la lobachevsquiana, la idea de tratar de establecer algunos teoremas de la lobachevsquiana estableciendo sus equivalentes en el modelo se sugiere por sí misma. El fin de este artículo es ilustrar este procedimiento. Además de establecer muy simplemente a partir del modelo de Poincaré algunos teoremas difíciles de la geometría plana lobachevsquiana, demostraremos cómo la trigonometría plana lobachevsquiana puede deducirse del modelo.*

Como en la demostración de la interpretación de III–6 del artículo anterior, un **triángulo** $O'P'Q'$, con **ángulo recto** en Q' es (fig. 8.5a) **congruente** a un **triángulo** OPQ, donde OP, OQ están sobre los radios de la circunferencia fundamental Σ y el **ángulo** $OQP = \pi/2$ radianes. Supongamos que la circunferencia Π determinada por la **recta** PQ corte a Σ en S y T y que $IOQJ$ sea un diámetro de Σ, que corte a Π nuevamente en W. Establecemos ahora una corta cadena de teoremas relacionados con la figura 8.5a. Para simplificar, designemos la **longitud de un segmento** AB por **AB.** Como la **medida de un ángulo** es la misma que la medida euclidiana del ángulo correspondiente, no se necesitarán aquí letras negras.

8.5.1 TEOREMA. *Si* WS *y* WT *cortan a* Σ *nuevamente en* U *y* V, *entonces* UV *es el diámetro de* Σ *perpendicular al diámetro* IJ.

* Véase Howard Eves y V. E. Hoggatt, Jr., "Trigonometría hiperbólica deducida del modelo de Poincaré", *The American Mathematical Monthly*, vol. LVIII, núm. 7, agosto-septiembre de 1951.

Selecciónese W como centro de inversión y elíjase una potencia tal que Σ se invierta en sí misma. Entonces S se invierte en U, y T en V. Como Π es ortogonal tanto a Σ como a IJ, se deduce que UV es el diámetro de Σ perpendicular al diámetro IJ.

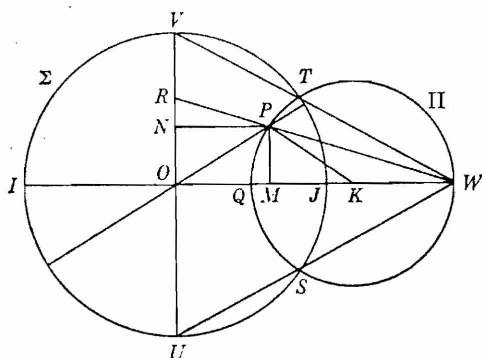


FIG. 8.5a

8.5.2 TEOREMA. *Supongamos que* WP *corte a* UV *en* R, *y designemos las longitudes de* OW *y* OR *por* m *y* n, *y el radio de* Σ *por* r. *Sean* K *el centro de* Π *y* M *y* N *los pies de las perpendiculares bajadas desde* P *a* OW *y* OR, *respectivamente. Entonces*

a) $KP = (m^2 - r^2)/2m$,

b) $OM = m(n^2 + r^2)/(m^2 + n^2)$,

c) $OP = (m^2n^2 + r^4)^{1/2}(m^2 + n^2)^{1/2}$,

d) $OQ = r^2/m$.

Como $KP = OW - OK = m - (r^2 + KP^2)^{1/2}$, se deduce que

$$KP = (m^2 - r^2)/2m.$$

Así mismo, como $\operatorname{tg} PWO = n/m$, y como $\sphericalangle PKO = 2\sphericalangle PWO$, se deduce que

$$\operatorname{tg} PKO = 2mn/(m^2 - n^2), \ \operatorname{sen} PKO = 2mn/(m^2 + n^2).$$

Por consiguiente,

$$OM = NP = (OW)(NR)/OR = m(n - MP)/n = m(n^2 + r^2)/(m^2 + n^2).$$

Entonces

$$OP^2 = MP^2 + OM^2 = (m^2n^2 + r^4)/(m^2 + n^2).$$

Finalmente,

$$OQ = OW - 2KP = m - 2(m^2 - r^2)/2m = r^2/m.$$

8.5.3 TEOREMA. *Los segmentos* OP, OQ, OR *se conectan por la relación*

$$\frac{r^2 + OP^2}{r^2 - OP^2} = \frac{r^2 + OR^2}{r^2 - OR^2} \cdot \frac{r^2 + OQ^2}{r^2 - OQ^2}.$$

Pues, por el teorema 8.5.2 (c),

$$\frac{r^2 + OP^2}{r^2 - OP^2} = \frac{r^2(m^2 + n^2) + m^2n^2 + r^4}{r^2(m^2 + n^2) - m^2n^2 - r^4} = \frac{(r^2 + n^2)(m^2 + r^2)}{(r^2 - n^2)(m^2 - r^2)}$$

$$= \frac{r^2 + n^2}{r^2 - n^2} \cdot \frac{r^2 + r^4/m^2}{r^2 - r^4/m^2} = \frac{r^2 + OR^2}{r^2 - OR^2} \cdot \frac{r^2 + OQ^2}{r^2 - OQ^2}$$

puesto que $OR = n$, y, por el teorema 8.5.2 (d), $OQ = r^2/m$.

8.5.4 DEFINICIONES Y NOTACIÓN. Para toda x real definimos

$$\operatorname{senh} x = (e^x - e^{-x})/2, \quad \cosh x = (e^x + e^{-x})/2,$$

$$\operatorname{tgh} x = \operatorname{senh} x/\cosh x,$$

donde senh, cosh y tgh son abreviaturas de *seno hiperbólico, coseno hiperbólico* y *tangente hiperbólica.*

8.5.5 TEOREMA. *Si* OQ *es un segmento radial,* Σ, *entonces*

a) $\cosh \mathbf{OQ} = (r^2 + OQ^2)/(r^2 - OQ^2)$,
b) $\operatorname{senh} \mathbf{OQ} = 2rOQ/(r^2 - OQ^2)$,
c) $\operatorname{tgh} \mathbf{OQ} = 2rOQ/(r^2 + OQ^2)$.

Pues, como $\mathbf{OQ} = \log (OQ,IJ)$, tenemos

$$\begin{aligned}\cosh \mathbf{OQ} &= (e^{\mathbf{OQ}} + e^{-\mathbf{OQ}})/2\\ &= [(OQ,IJ) + (OQ,JI)]/2\\ &= [(OI/IQ)/(OJ/JQ) + (OJ/JQ)/(OI/IQ)]/2\\ &= (QJ/IQ + IQ/QJ)/2\\ &= [(r - OQ)/(r + OQ) + (r + OQ)/(r - OQ)]/2\\ &= (r^2 + OQ^2)/(r^2 - OQ^2),\end{aligned}$$

y la relación (a) queda establecida. Las relaciones (b) y (c) se deducen en una forma semejante, o bien, a partir de las identidades $\operatorname{senh}^2 x = \cosh^2 x - 1$ y $\operatorname{tgh} x = \operatorname{senh} x/\cosh x$.

8.5.6 TEOREMA. *En la figura* 8.5a, $\cosh \mathbf{OP} = \cosh \mathbf{OQ} \cosh \mathbf{QP}$.

Como una consecuencia inmediata de los teoremas 8.5.3 y 8.5.5 (a) tenemos

$$\cosh \mathbf{OP} = \cosh \mathbf{OQ} \cosh \mathbf{OR}.$$

Pero, por el teorema 8.5.1, $(QP,ST) = W(QP,ST) = (OR,UV)$, de donde **OR** = **QP**, y el teorema queda establecido.

8.5.7 TEOREMA. *En la figura* 8.5*a*, *cos* QOP = tgh **OQ**/tgh **OP**.

Porque, por el teorema 8.5.5 (c),

$$\text{tgh}\,\mathbf{OQ}/\text{tgh}\,\mathbf{OP} = OQ(r^2 + OP^2)/OP(r^2 + OQ^2).$$

Sustituyendo las expresiones de OP y OQ que se dan en el teorema 8.5.2 (c) y (d), y simplificando, tenemos

$$\begin{aligned}\text{tgh}\,\mathbf{OQ}/\text{tgh}\,\mathbf{OP} &= m(r^2 + n^2)/(m^2n^2 + r^4)^{1/2}(m^2 + n^2)^{1/2}\\ &= [m(r^2 + n^2)/(m^2 + n^2)]/[(m^2n^2 + r^4)^{1/2}/(m^2 + n^2)^{1/2}]\\ &= OM/OP \qquad \text{[por el teorema 8.5.2 (b) y (c)]}\\ &= \cos QOP,\end{aligned}$$

y el teorema queda establecido.

8.5.8 OBSERVACIÓN. Los teoremas 8.5.6 y 8.5.7 dicen que en todo triángulo rectángulo lobachevsquiano, ABC, con el ángulo recto en C, se tiene

$$\cosh c = \cosh a \cosh b, \quad \cos A = \text{tgh}\, b/\text{tgh}\, c,$$

donde a, b, c son los lados opuestos a los ángulos A, B, C, respectivamente. Con estas dos fórmulas se pueden obtener todas las demás de trigonometría lobachevsquiana por procedimientos puramente analíticos.

Utilicemos ahora el modelo de Poincaré para restablecer de una manera sencilla dos de nuestros teoremas anteriores (teoremas 7.3.5 y 7.4.1) y uno nuevo que da la relación entre el ángulo de paralelismo en un punto P para una recta AB y la distancia del punto P a la recta AB.

8.5.9 TEOREMA. *La suma de los ángulos de un triángulo lobachevsquiano es siempre menor que dos rectos.*

Como en la demostración de la interpretación de III–6 del artículo anterior, el **triángulo** es **congruente** a un **triángulo** OPQ, donde O es el centro de la circunferencia fundamental Σ y OP, OQ son rectas radiales de Σ. Pero en este **triángulo** es evidente que la **suma de los ángulos** es menor que dos rectos.

8.5.10 TEOREMA. *Dos rectas hiperparalelas tienen una perpendicular común única.*

Sean m y n (fig. 8.5b) dos **rectas** hiperparalelas. El centro radical R de las tres "circunferencias" Σ, m, n, está en el exterior de Σ; en consecuencia, las tres "circunferencias" tienen una circunferencia radical, que es

la única circunferencia ortogonal a cada una de las Σ, m y n. Esto demuestra el teorema.

8.5.11 TEOREMA. *Si α es el ángulo de paralelismo para la distancia* p, *entonces,* $e^{-p} = \operatorname{tg} \alpha/2$.

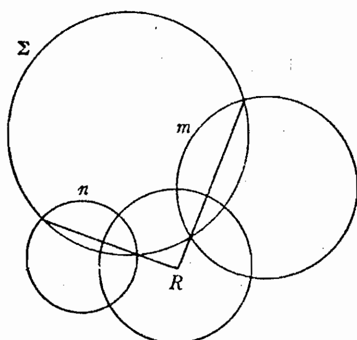


FIG. 8.5b

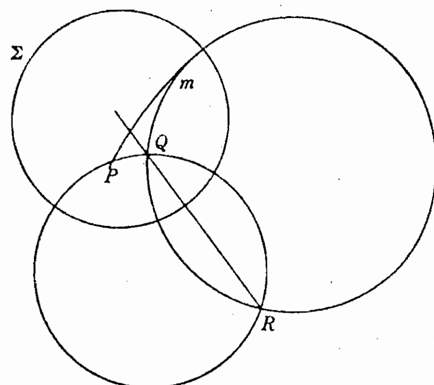


FIG. 8.5c

Supongamos que la "circunferencia" que contiene la **perpendicular** desde el **punto** dado P a la **recta** dada m y la "circunferencia" que contiene esta **recta** m se corten nuevamente en R (fig. 8.5c). Entonces R está en el exterior de Σ y Q y R son colineales con el centro de Σ. Inviértase la figura con respecto a R como centro de inversión y de modo que Σ se invierta en sí misma. Entonces, los arcos PQ y m se invierten en segmentos de recta perpendiculares entre sí, y Q se invierte en el centro de Σ, como se ilustra en la figura 8.5d. En esta figura tenemos

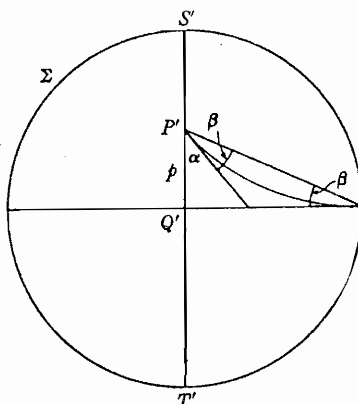


FIG. 8.5d

$$\alpha + 2\beta = \pi/2, \quad \text{o} \quad \beta = \pi/4 - \alpha/2.$$

Ahora bien, tomando Σ con radio unidad, tenemos

$$p = \log(P'Q',T'S') = \log(P'T'/P'S') = \log\frac{1+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\beta},$$

de donde

$$e^{-p} = \frac{1-\operatorname{tg}(\pi/4-\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}(\pi/4-\alpha/2)} = \frac{1-\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha/2}{1+\operatorname{tg}\alpha/2}}{1+\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha/2}{1+\operatorname{tg}\alpha/2}}$$

$$= \frac{1+\operatorname{tg}\alpha/2-1+\operatorname{tg}\alpha/2}{1+\operatorname{tg}\alpha/2+1-\operatorname{tg}\alpha/2} = \operatorname{tg}\alpha/2.$$

8.5.12 OBSERVACIÓN. Obsérvese que $p = \log\operatorname{ctg}\alpha/2$ y $\alpha = 2\operatorname{tg}^{-1}e^{-p}$. Se deduce que hemos elegido nuestra unidad de longitud para que sea la distancia correspondiente a $2\operatorname{tg}^{-1}(1/e)$, como el ángulo de paralelismo. Vemos que, en la geometría lobachevsquiana, las longitudes y las áreas son absolutas. Con cada segmento lineal se puede relacionar un ángulo definido (es decir, el ángulo de paralelismo para este segmento), y con cada área puede relacionarse un ángulo definido (es decir, el ángulo agudo del cuadrilátero de Saccheri equivalente).

PROBLEMAS

8.5–1 Establézcase la identidad $\operatorname{senh}^2 x = \cosh^2 x - 1$.

8.5–2 Dedúzcanse las relaciones (b) y (c) del teorema 8.5.5.

8.5–3 Establézcanse, con el modelo de Poincaré, los teoremas 7.2.7, 7.2.8 y 7.2.9.

8.5–4 Demuéstrese, por medio del modelo de Poincaré, que a medida que la distancia p aumenta de 0 a ∞, el ángulo correspondiente del paralelismo disminuye de $\pi/2$ a 0.

8.5–5 Demuéstrese, por medio del modelo de Poincaré, que el cuarto ángulo del cuadrilátero de Lambert es agudo.

8.5–6 Demuéstrese que: a) $\operatorname{senh} x + \cosh x = e^x$,

b) $\operatorname{tgh} x = (e^{2x}-1)/(e^{2x}+1)$.

8.5–7 a) Si $x = \operatorname{senh} y$, demuéstrese que $y = \log[x + (x^2+1)^{1/2}]$.

b) Si $x = \operatorname{tgh} y$, demuéstrese que $y = (1/2)\log[(1+x)/(1-x)]$.

8.5–8 Establézcanse las siguientes identidades:

a) $\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y$

b) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

c) $\operatorname{tgh}(x \pm y) = (\operatorname{tgh} x \pm \operatorname{tgh} y)/(1 \pm \operatorname{tgh} x \operatorname{tgh} y)$

8.5–9 Establézcanse las siguientes identidades:

a) $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

b) $\cosh 2x = \operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x$

c) $\operatorname{tgh} 2x = 2 \operatorname{tgh} x/(1 + \operatorname{tgh}^2 x)$

8.5–10 Establézcanse las siguientes identidades [donde $u = (x + y)/2$ y $v = (x - y)/2$:

a) $\operatorname{senh} x + \operatorname{senh} y = 2 \operatorname{senh} u \cosh v$

b) $\operatorname{senh} x - \operatorname{senh} y = 2 \cosh u \operatorname{senh} v$

c) $\cosh x + \cosh y = 2 \cosh u \cosh v$

d) $\cosh x - \cosh y = 2 \operatorname{senh} u \operatorname{senh} v$

8.5–11 Demuéstrese que:

a) $\operatorname{senh} (-x) = - \operatorname{senh} x$

b) $\cosh (-x) = \cosh x$

c) $\operatorname{tgh} (-x) = -\operatorname{tgh} x$

8.5–12 Exprésese $\operatorname{tgh} x$ en función de: **a)** $\operatorname{senh} x$, **b)** $\cosh x$.

8.5–13 Dedúzcanse las siguientes fórmulas para el triángulo rectángulo lobachevsquiano ABC (con el ángulo recto en C) a partir de las dos fórmulas: 1) $\cosh c = \cosh a \cosh b$, 2) $\cos A = \operatorname{tgh} b/\operatorname{tgh} a$.

a) $\operatorname{sen} A = \operatorname{senh} a/\operatorname{senh} c$, $\operatorname{sen} B = \operatorname{senh} b/\operatorname{senh} c$

b) $\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B = \cosh c$

c) $\operatorname{tg} A = \operatorname{tgh} a/\operatorname{senh} b$, $\operatorname{tg} B = \operatorname{tgh} b/\operatorname{senh} a$

d) $\cosh a = \cos A/\operatorname{sen} B$, $\cosh b = \cos B/\operatorname{sen} A$

8.5–14 Para el triángulo lobachevsquiano general ABC demuéstrese que:

a) $\operatorname{senh} a : \operatorname{senh} b : \operatorname{senh} c = \operatorname{sen} A : \operatorname{sen} B : \operatorname{sen} C$

b) $\cosh a = \cosh b \cosh c - \operatorname{senh} b \operatorname{senh} c \cos A$

8.5–15 Demuéstrese que si hemos elegido la **longitud** $AB = k \log (AB, TS)$, donde k es una constante positiva (cambiando así la unidad de **longitud**), entonces:

a) las fórmulas de los problemas 8.5–13 y 8.5–14 tendrían que haberse modificado en todos lados sustituyendo a, b, c por $a/k, b/k, c/k$.

b) $\operatorname{tg} \alpha/2 = e^{-p/k}$, donde α es el ángulo de paralelismo correspondiente a la distancia p.

c) $\lim_{k \to \infty} \operatorname{tg} \alpha/2 = 1$, y la geometría lobachevsquiana se vuelve sensiblemente euclidiana si k se elige muy grande en relación con las longitudes de los segmentos que intervienen.

8.6 Geometría proyectiva y geometría no desarguesiana. En el Capítulo VI consideramos la geometría proyectiva esencialmente como se desarrolló históricamente. Esto es, examinaremos cierto núcleo de teoremas

que están dentro del cuerpo que se expande de los teoremas de la geometría euclidiana y que tienen un carácter común que llamamos *descriptivo*. Hay ciertas características no satisfactorias de dicho enfoque a la geometría proyectiva. En primer lugar, si la base postulacional de la geometría euclidiana fuera algo vaga o incompleta (como es generalmente lo que ocurre en la explicación a nivel intermedio del tema), entonces dicha vaguedad o calidad de incompleto también se reflejará en la geometría proyectiva. Y aun si la base postulacional de la geometría euclidiana se hiciera precisa, los teoremas de la geometría proyectiva son de tipo tan especial que esta base, al menos en su totalidad, no serviría para distinguir los teoremas proyectivos de los no proyectivos. Tal vez la forma más satisfactoria para vencer la dificultad sea reconstruir la geometría proyectiva como una disciplina independiente, con sus propios términos primitivos y bases postulacionales.

Hay muchos conjuntos de postulados para la geometría plana proyectiva que podríamos dar, pero los siguientes * servirán con más claridad para los fines de este artículo. Aquí, "punto", "recta" y "sobre" son los términos primitivos.

8.6.1 Postulados para la geometría proyectiva plana.

I. *Hay una y sólo una recta sobre cada dos puntos distintos, y uno y sólo un punto sobre cada dos rectas distintas.*

II. *Existen dos puntos y dos rectas tales que cada uno de los puntos está sólo sobre una de las rectas y cada una de las rectas está sólo sobre uno de los puntos.*

III. *Existen dos puntos y dos rectas, no estando los puntos sobre las rectas, tales que el punto sobre las dos rectas está sobre la recta que pasa sobre los dos puntos.*

Ahora se recordará (del artículo 6.4) que de la proposición dada referente sólo a los términos primitivos *punto, recta* y *sobre,* podemos formar una segunda proposición, llamada *dual* † de la primera, simplemente intercambiando en todas las expresiones las palabras *punto* y *recta.* El principio de dualidad de la geometría proyectiva plana asegura que: *el dual de una proposición verdadera de la geometría proyectiva plana es otra proposición verdadera de dicha geometría proyectiva plana.* La demostración de este principio, dado en el artículo 6.4, se basó en la teoría de Poncelet de polos y polares, pero se expresó un sentimiento de insatisfacción con esta demos-

* K. Menger, "Postulados autoduales de geometría proyectiva", *The American Mathematical Monthly,* 55 (1948), 195.

† Nota del R. También se llama *correlativa* de la primera; y al principio de dualidad se le llama también correlación.

tración en el 6.4.1. Estamos ahora en condiciones de dar una demostración simple y completamente satisfactoria del principio de dualidad de la geometría proyectiva plana. Todo lo que tenemos que hacer es demostrar que los postulados de la geometría proyectiva plana implican el dual de cada uno de ellos, pues entonces el dual de un teorema que se haya deducido del conjunto de postulados puede establecerse simplemente dualizando, una por una, las explicaciones de la demostración del teorema original. El hecho de que cada uno de los postulados que hemos seleccionado sea realmente autodual nos ahorra la tarea de deducir como teoremas el sistema de enunciados duales y, por tanto, nos permite admitir de inmediato el principio de dualidad en la geometría proyectiva plana. Podemos ahora volver a expresar el principio de dualidad en la forma siguiente:

8.6.2 El principio de dualidad para la geometría proyectiva plana. *Si un teorema es deducible de los postulados de la geometría proyectiva plana, entonces su dual también será deducible de dichos postulados.*

Es un hecho interesante y significativo que los postulados de la geometría proyectiva plana dados antes no requieren que el número de puntos de nuestra geometría sea infinito. De hecho, considérese la situación en que haya siete "puntos", es decir, las siete letras A, B, C, D, E, F, G, y siete "rectas", es decir, los siete tríos (AFB), (BDC), (CEA), (AGD), (BGE), (CGF), (DEF). El postulado I se verifica fácilmente considerando independientemente cada uno de los 21 pares de "puntos" y cada uno de los 21 pares de "rectas". El postulado II es cumplido por los dos "puntos", B, C, y las dos "rectas" (AFB), (AEC). El postulado III es verificado por los dos "puntos", B, C y las dos "rectas" (AGD), (DEF).

Una geometría proyectiva que sólo contenga un número finito de puntos distintos se llama *geometría proyectiva finita.* El modelo anterior establece la existencia de una geometría proyectiva finita. También establece la compatibilidad absoluta de nuestro conjunto de postulados para la geometría proyectiva plana. Y, finalmente, demuestra que si deseamos que nuestra geometría plana proyectiva se parezca más al concepto histórico primitivo de la materia tendremos que introducir más postulados. De hecho, añadiendo gradualmente más postulados adecuados e introduciendo ciertas modificaciones, es posible convertir el conjunto de postulados de la geometría proyectiva plana en un conjunto de postulados de la geometría plana euclidiana, pasando, en el camino, por los conjuntos de postulados de varias geometrías intermedias. Dicho paso de la geometría proyectiva a la euclidiana es un procedimiento interesante, pero tan excesivamente largo que tenemos que pasarlo por alto aquí. Sin embargo, diremos algo acerca de la ampliación de nuestro conjunto de postulados de la geometría proyectiva

plana, de modo que haga que la geometría resultante se parezca a la geometría proyectiva plana clásica considerada en el Capítulo VI.

El teorema de los dos triángulos de Desargues para el plano (que *los triángulos copolares en un plano son coaxiales, y viceversa)* es un principio respecto a la incidencia de algunos puntos y rectas del plano. Podría parecer, entonces, que el teorema de los dos triángulos de Desargues para el plano podría ser deducible de los postulados anteriores para la geometría proyectiva plana, puesto que estos postulados describen la relación de incidencia de un punto y una recta en el plano. Sin embargo, demostraremos ahora que el citado teorema de Desargues para el plano no está implicado por los postulados de la geometría proyectiva plana. Para lograrlo, cons-

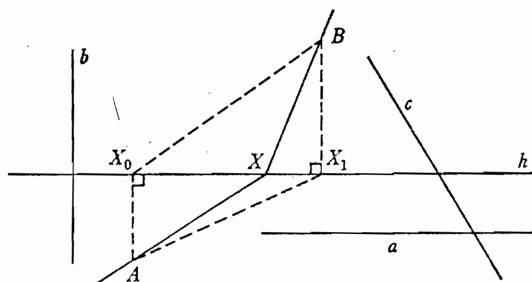


FIG. 8.6a

truiremos un modelo en que los postulados de la geometría proyectiva plana se verifiquen, pero en el que el mencionado teorema de Desargues no se cumpla.

Elíjase una recta ordinaria, h, de un plano euclidiano ilimitado como eje x de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares (fig. 8.6a). Por *puntos* del modelo se entienden los puntos reales e ideales del plano euclidiano ilimitado. Por *rectas* del modelo indicaremos la recta ideal en el infinito, todas las rectas reales de pendiente cero, infinita o negativa (como las a, b y c), más todas las líneas quebradas que consisten en dos semirrectas de pendiente positiva que se encuentran en h y con la pendiente de la semirrecta superior doble de la de la inferior (como la línea quebrada AXB). Por *sobre* en el modelo indicaremos la interpretación evidente.

Podemos verificar ahora los tres postulados de la geometría proyectiva plana de nuestro modelo. Los postulados II y III se verifican fácilmente. La única parte de la verificación del postulado I que requiere comentario es la verificación de que dos puntos A y B del modelo, donde A está en la mitad inferior del plano y B en la mitad superior con B a la derecha de A, determinan una recta única del modelo. En la figura 8.6a, sean X_0 y X_1 los pies de las perpendiculares desde A y B a h. A medida que el punto

X se mueve a lo largo de la recta h desde X_0 hasta X_1, el valor de (pendiente XB)/(pendiente AX) aumenta continuamente desde 0 hasta ∞. Se deduce que hay un punto único, X, entre X_0 y X_1 tal que (pendiente XB)/(pendiente AX) $= 2$. Si X no está entre X_0 y X_1, entonces claramente la línea quebrada AXB no es una recta del modelo. Por tanto, hay una y sólo una recta en el modelo que una los puntos A y B.

Considérense ahora los dos triángulos copolares ABC, $A'B'C'$ de la figura 8.6b. Supongamos que AA', BB', CC' concurran en O y que BC y $B'C'$ se corten en L, CA y $C'A'$ en M, AB y $A'B'$ en N. Entonces, como el teorema de los dos triángulos de Desargues se verifica en el plano eucli-

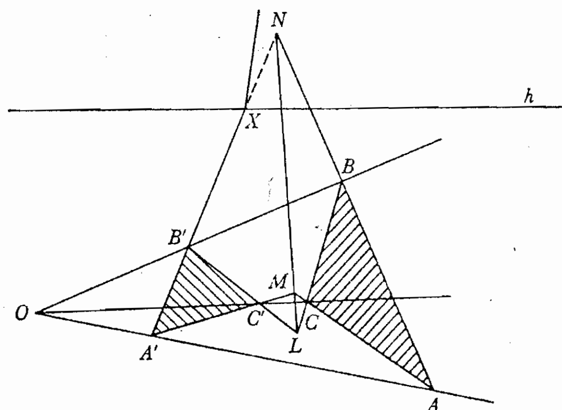


Fig. 8.6b

diano, L, M, N son colineales. Pero hemos dibujado la figura de modo que todos los puntos con letra, excepto el N, estén por debajo de h, y que las rectas LM y AB tengan pendiente negativa mientras la recta $A'B'$ la tenga positiva. Se deduce que, en el modelo, los dos triángulos son aún copolares en O, pero la recta determinada por A' y B' no pasa por N, y los dos triángulos no son coaxiales en el modelo.

8.6.3 Teorema. *El teorema de los dos triángulos de Desargues es independiente de los postulados de la geometría proyectiva plana.*

El modelo que acabamos de describir es una geometría proyectiva en la que el teorema de Desargues no se verifica, y la cual se llama geometría no desarguesiana; y este ejemplo particular de la geometría no desarguesiana fue dado por F. R. Moulton en 1902, y es quizá el ejemplo más simple de una geometría no desarguesiana que se haya ideado. Un ejemplo más complejo de la geometría no desarguesiana se dio por Hilbert en su *Grundlagen der Geometrie,* en la que demuestra que el caso en el plano

del teorema de Desargues no puede deducirse sin utilizar todos los postulados de congruencia o bien la suposición de que el plano está sumergido en un espacio tridimensional, situación curiosa, puesto que el caso en el plano del teorema de Desargues debiera parecer que es independiente tanto de nociones métricas como de cualquier espacio de más dimensiones. Si el lector recuerda las diversas demostraciones que hemos dado del caso en el plano del teorema de Desargues, podrá observar que estas demostraciones utilizan o bien nociones métricas o bien el hecho de que el plano está dentro del espacio tridimensional.

Para simplificar, designaremos las tres siguientes proposiciones (planas) por D, P y F; se observará que la proposición D es parte del caso en el plano del teorema de Desargues y que la proposición P es el teorema de Pappus (la proposición F generalmente se llama *Teorema fundamental de la geometría proyectiva clásica.)*

8.6.4 Proposición D. *Si* ABC, A′B′C′ *son dos triángulos en que los seis lados y los seis vértices son distintos, y si* AA′, BB′, CC′ *concurren, entonces los tres puntos de intersección de* BC *y* B′C′, CA *y* C′A′, AB *y* A′B′ *son colineales.*

8.6.5 Proposición P. *Si* A, B, C *y* A′, B′, C′ *son dos conjuntos de puntos colineales sobre rectas distintas, entonces los tres puntos de intersección de* BC′ *y* B′C, CA′ *y* C′A, AB′ *y* A′B *son colineales.*

8.6.6 Proposición F. *Si una proyectividad transporta a cada tres puntos colineales en sí mismos, entonces transportará a cada punto de su recta en sí mismo.*

Puede demostrarse que en presencia de nuestros tres postulados, I, II, III, de la geometría proyectiva plana: 1) la proposición F implica la proposición P; 2) las proposiciones P y D implican la proposición F; 3) la proposición D implica el recíproco de la proposición D; 4) la proposición P implica la proposición D. Se deduce que las proposiciones P y F son equivalentes y que la P implica las D y F y el recíproco de la proposición D. De hecho, si además de nuestros tres postulados, I, II, III, suponemos únicamente la proposición P, entonces toda la geometría proyectiva plana clásica puede deducirse.

Para enunciar esto en otra forma, formulamos las siguientes definiciones.

8.6.7 Definiciones. Un *plano proyectivo* es la noción compuesta de dos conjuntos no vacíos de objetos llamados *puntos* y *rectas,* con una relación *sobre* entre puntos y rectas, para los que nuestros tres postulados I,

II, III se verifican. Así mismo, como la proposición D, P o F también se verifica, el plano proyectivo se dice que es *desarguesiano, pappiano* o *clásico.*

Tenemos entonces el siguiente teorema.

8.6.8 TEOREMA. *Un plano proyectivo pappiano es desarguesiano y clásico.*

No quitaremos espacio aquí para considerar las partes importantes que juegan las proposiciones D y P en el establecimiento de un sistema de coordenadas en un plano proyectivo.

PROBLEMAS

8.6–1 Demuéstrese que el conjunto de postulados 8.6.1 y el siguiente conjunto de postulados son equivalentes (esto es, cada uno implica el otro).

P1. *Existe al menos una recta.*

P2. *Hay al menos tres puntos sobre cada recta.*

P3. *No todos los puntos están sobre la misma recta.*

P4. *Hay exactamente una recta sobre dos puntos distintos cualesquiera.*

P5. *Hay al menos un punto en dos rectas cualesquiera distintas.*

8.6–2 a) Dedúzcanse los siguientes teoremas a partir del conjunto de postulados del problema 8.6–1.

T1. *Existe al menos un punto.*

T2. *Hay exactamente un punto sobre dos rectas distintas cualesquiera.*

T3. *Hay al menos tres rectas sobre cada punto.*

T4. *No todas las rectas están sobre el mismo punto.*

b) Demuéstrese ahora que el principio de dualidad se verifica en la geometría que se deduce de los postulados del problema 8.6–1.

8.6–3 Dedúzcanse los siguientes teoremas adicionales a partir del conjunto de postulados del problema 8.6–1.

T5. *Si hay al menos* n *puntos sobre una recta, entonces habrá al menos* n *puntos en cualquiera otra recta.*

T6. *Si hay a lo más* n *puntos sobre una recta, entonces habrá a lo más* n *puntos sobre cualquiera otra.*

T7. *Si hay exactamente* n *puntos sobre una recta, entonces hay exactamente* n *puntos en toda recta.*

T8. *Si hay exactamente* m *rectas sobre un punto, entonces hay exactamente* m *rectas sobre todo punto.*

T9. *Si hay exactamente* n *puntos sobre cada recta, entonces habrá exactamente* n *rectas sobre cada punto.*

T10. *Si hay exactamente* n *puntos sobre cada recta, entonces habrá* $n^2 - n + 1$ *puntos en conjunto y* $n^2 - n + 1$ *rectas en conjunto.*

8.6–4 Demuéstrese que una geometría proyectiva plana debe contener al menos 7 puntos distintos y 7 rectas distintas.

8.6–5 Constrúyase una geometría proyectiva plana con exactamente cuatro puntos distintos sobre cada recta.

8.6–6 Demuéstrese que lo siguiente es una interpretación euclidiana de los postulados de la geometría proyectiva plana. Sea O un punto fijo del espacio; por un "punto" indicaremos una recta que pasa por O; por una "recta" indicaremos un plano que pasa por O; por "sobre" indicaremos la interpretación evidente.

8.6–7 Establézcase la independencia de los postulados del conjunto de ellos del problema 8.6–1.

8.6–8 Demuéstrese que los postulados P1, P2, P3 del conjunto de ellos del problema 8.6–1 puede sustituirse por el simple postulado:

P1′. *Existen cuatro puntos, sin que tres de ellos sean colineales.*

8.6–9 Demuéstrese que el principio de dualidad se verifica en un plano proyectivo desarguesiano.

8.6–10 Verifíquense realmente los postulados I, II, III del artículo 8.6 en el modelo establecido allí de una geometría proyectiva plana no desarguesiana.

8.6–11 **a)** Demuéstrese que las rectas modificadas del modelo de la geometría plana no desarguesiana del artículo 8.6 pueden definirse analíticamente por la ecuación

$$y = m(x - a)f(y,m),$$

donde i) $f(y,m) = 1$ si $m \leqq 0$; ii) $f(y,m) = 1$ si $m > 0$ y $y \leqq 0$; iii) $f(y,m) = \frac{1}{2}$ si $m > 0$ y $y > 0$.

b) Sean $P(r,s)$, $Q(t,u)$ dos puntos del plano cartesiano tales que $r < t$, $s < 0$, $u > 0$. Demuéstrese que la única recta modificada determinada por P y Q corta al eje x en el punto en que $x = (ur - 2st)/(u - 2s)$.

8.6–12 Si en una ecuación trigonométrica cada función trigonométrica que aparece se sustituye por su cofunción, la nueva ecuación obtenida se llama la *dual* de la original. Establézcase el siguiente *principio de dualidad* de la trigonometría: *Si una ecuación trigonométrica en que sólo interviene un ángulo es una identidad, entonces su dual también es una identidad.*

8.7 Geometrías finitas. Una *geometría finita* es la que sólo contiene un número finito de puntos, rectas y planos. La existencia de una geometría de este tipo que contiene exactamente 7 puntos, 7 rectas y 1 plano fue establecida en el artículo anterior. G. Fano, en 1892, fue el primero que

consideró una geometría finita, una geometría tridimensional que contenía 15 puntos, 35 rectas y 15 planos, conteniendo cada plano 7 puntos y 7 rectas. Pero las geometrías finitas no alcanzaron su máxima importancia sino hasta alrededor de 1906, cuando Oswald Veblen y W. H. Bussey hicieron un estudio de las geometrías proyectivas finitas. Desde entonces, el estudio de las geometrías finitas ha crecido considerablemente y ha dado origen a muchos problemas no resueltos que han atraído la atención de los investigadores actuales. Por ejemplo, se ha demostrado que existen geometrías proyectivas finitas que tienen n puntos en una recta si $n - 1$ es una potencia de un primo, pero no se sabe si n puede tener algún otro valor. Se ha demostrado que sólo hay esencialmente una geometría proyectiva finita con n puntos sobre una recta si $n = 3$, 4, 5 o 6, ninguna geometría de este tipo para $n = 7$, exactamente una para $n = 8$, al menos una para $n = 9$, y al menos cuatro para $n = 10$ (una de las cuales es la desarguesiana y las otras tres no desarguesianas). Un estudio sistemático de las geometrías finitas requiere una gran excursión dentro del álgebra abstracta y, por tanto, está más allá de los límites impuestos a esta obra. La existencia de las geometrías finitas proporciona la base adicional de la naturaleza hipotético-deductiva de gran parte del estudio geométrico actual. En este artículo consideraremos muy brevemente algunas geometrías finitas planas especiales.

8.7.1 *Geometría proyectiva de los siete puntos de Fano.* Los postulados para la geometría finita de 7 puntos del artículo 8.6 pueden enunciarse como sigue:

P1. *Existe al menos una recta.*

P2. *Hay exactamente tres puntos sobre toda recta.*

P3. *No todos los puntos están sobre la misma recta.*

P4. *Hay exactamente una recta sobre dos puntos distintos cualesquiera.*

P5. *Hay al menos un punto sobre dos rectas distintas cualesquiera.*

La geometría finita es una geometría proyectiva (problema 8.6–1) y puede representarse por el siguiente diagrama simbólico, en el que los números $1, \cdots, 7$ representan puntos y las columnas verticales representan rectas:

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
4	5	6	7	1	2	3

8.7.2 *Una geometría proyectiva finita de trece puntos y trece rectas.* Como una base postulacional para esta geometría tomamos los postulados de 8.7.1 con el postulado P2 sustituido por:

P2'. *Hay exactamente cuatro puntos sobre toda recta.*

Esta geometría puede representarse por el siguiente diagrama simbólico:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1	2	3
10	11	12	13	1	2	3	4	5	6	7	8	9

8.7.3 *Geometría finita de Young de los nueve puntos y doce rectas.* Si en la geometría proyectiva finita de 8.7.2 omitimos una de las rectas de cuatro puntos, obtenemos una geometría de 9 puntos y 12 rectas. Esto equivale a proyectar una de las rectas al infinito y convertir así la geometría proyectiva de 13 puntos y 13 rectas sin paralelas en una geometría euclidiana de 9 puntos y 12 rectas con paralelas.* Esta geometría puede definirse por los siguientes postulados:

P1. *Existe al menos una recta.*

P2. *Hay exactamente tres puntos sobre toda recta.*

P3. *No todos los puntos están sobre la misma recta.*

P4. *Hay exactamente una recta sobre dos puntos distintos cualesquiera.*

P5. *Dada una recta* l *y un punto* P, *que no esté sobre* l, *hay exactamente una recta sobre* P *y que no está sobre ningún punto de* l.

Dos rectas que no contienen ningún punto común se dice que son *paralelas,* y esta geometría finita es euclidiana en el sentido de que por un punto que no esté sobre una recta hay una y sólo una paralela a dicha recta. El principio de dualidad no se verifica en esta geometría por cuanto que dos puntos distintos cualesquiera determinan una recta, pero dos rectas distintas no siempre determinan un punto. El lector puede tratar de deducir los siguientes teoremas de esta geometría a partir de la base postulacional anterior.

T1. *Existen exactamente nueve puntos en la geometría.*

* Esta geometría se utiliza para ilustrar un sistema lógico completo en M. R. Cohen y E. Nagel, *Introduction to Logic and Scientific Method.* Nueva York: Harcourt, Brace and Company, Inc., 1934.

T2. *Existen exactamente doce rectas en la geometría.*

T3. *Toda recta tiene precisamente dos rectas paralelas a ella.*

T4. *Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.*

T5. *El teorema de Pappus se verifica para seis puntos sobre un par de rectas paralelas.*

La geometría puede representarse por el siguiente diagrama simbólico:

1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	7
2	4	5	6	5	4	6	4	5	6	5	8
3	7	9	8	8	9	7	8	7	9	6	9

8.7.4 *La geometría finita de Pappus.* La geometría finita de 9 puntos y 9 rectas con 3 puntos sobre cada recta y 3 rectas sobre cada punto puede definirse por los siguientes postulados:

P1. *Existe al menos una recta.*

P2. *Hay exactamente tres puntos sobre toda recta.*

P3. *No todos los puntos están sobre la misma recta.*

P4. *Hay a lo más una recta sobre dos puntos distintos cualesquiera.*

P5. *Dada una recta* l *y un punto* P, *que no esté en* l, *hay exactamente una recta sobre* P *y que no está sobre ningún punto de* l.

P6. *Dado un punto* P *y una recta* l, *que no esté sobre* P, *hay exactamente un punto sobre* l *y que no está sobre ninguna recta que pase sobre* P.

Dos rectas sin ningún punto común se dice que son *paralelas,* y dos puntos sin una recta común se dice que son *paralelos.* El principio de dualidad se verifica en esta geometría, que tiene la propiedad euclidiana del paralelismo de rectas y además la propiedad dual del paralelismo de puntos. Los siguientes teoremas pueden establecerse:

T1. *Existe al menos un punto.*

T2. *No todas las rectas pasan por el mismo punto.*

T3. *Hay a lo más un punto sobre dos rectas distintas cualesquiera.*

T4. *Hay exactamente tres rectas sobre todo punto.*

T5. *Se verifica el principio de dualidad.*

T6. *El teorema de Pappus se verifica para los seis puntos sobre un par de rectas paralelas.*

T7. *Hay exactamente nueve puntos en la geometría.*

T8. *Hay exactamente nueve rectas en la geometría.*

La geometría puede representarse por el siguiente diagrama simbólico o por el esquema gráfico de la figura 8.7a.

1	2	3	4	5	6	1	2	7
2	3	4	5	6	1	3	4	8
7	8	9	7	8	9	5	6	9

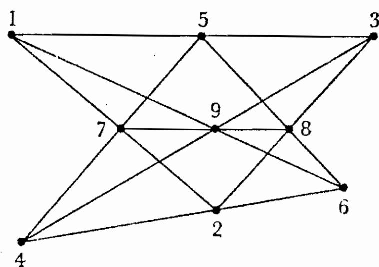


Fig. 8.7a

8.7.5 *La geometría finita de Desargues.* Esta es una geometría finita de 10 puntos y 10 rectas con 3 puntos sobre una recta y 3 rectas sobre un punto. Puede definirse por los siguientes postulados:

P1. *Existe al menos un punto.*

Definiciones. Una recta *p* se llama *polar* de un punto *P* si no hay ninguna recta que pase tanto sobre *P* como sobre un punto de *p*. Un punto *P* se llama *polo* de una recta *p* si no hay ningún punto que esté sobre *p* y una recta que pase sobre *P*.

P2. *Todo punto tiene una polar.*

P3. *Toda recta tiene a lo más un polo.*

P4. *Hay a lo más una recta sobre dos puntos distintos cualesquiera.*

P5. *Hay al menos tres puntos distintos sobre toda recta.*

P6. *Si la recta* p *no pasa sobre un punto* Q, *entonces hay un punto sobre* p *y una polar* q *de* Q.

Dos rectas sin un punto común se dice que son *paralelas;* dos puntos sin una recta común se dice que son *paralelos*. Esta geometría es interesante porque es darguesiana, tiene dualidad, tiene polaridad y es lobachevsquiana en el sentido de que una recta puede tener hasta tres rectas paralelas que pasen por un punto que no esté sobre ella. El lector puede tratar de establecer los siguientes teoremas:

T1. *Un punto tiene exactamente una polar y una recta tiene exactamente un polo.*

T2. *Si el punto* P *es el polo de la recta* p, *entonces* p *es la polar del punto* P.

T3. *Si el punto* P *está sobre la polar de un punto* Q, *entonces el punto* Q *está sobre la polar del punto* P.

T4. *Dos rectas paralelas a la misma recta tienen un punto común.*

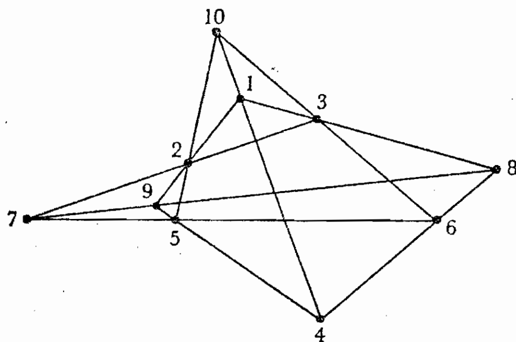


Fig. 8.7b

T5. *Hay exactamente tres puntos sobre toda recta y tres rectas sobre todo punto.*

T6. *Hay exactamente diez puntos y diez rectas en la geometría.*

T7. *Se verifica el principio de dualidad.*

T8. *Se verifica el teorema de Desargues.*

La geometría puede representarse por el siguiente diagrama simbólico o por el esquema gráfico de la figura 8.7b.

1	2	3	2	4	3	6	1	4	7
4	5	6	3	6	1	4	2	5	8
10	10	10	7	7	8	8	9	9	9

8.7.6 *Geometrías afines.* Una *geometría afín* puede definirse por los siguientes postulados:

P1. *Existe al menos una recta.*

P2. *Hay al menos dos puntos sobre toda recta.*

P3. *No todos los puntos están sobre la misma recta.*

P4. *Hay exactamente una recta sobre dos puntos distintos cualesquiera.*

P5. *Dada una recta* l *y un punto* P *que no esté sobre* l, *hay exactamente una recta sobre* P *y que no pase sobre ningún punto de* l. (Este puede llamarse el *postulado de las paralelas.)*

Los siguientes teoremas pueden establecerse a partir de los postulados anteriores.

T1. *Toda recta contiene o bien un número infinito de puntos o bien el mismo número finito.*

T2. *Todo punto tiene un número infinito de rectas o bien el mismo número finito.*

T3. *Si toda recta contiene exactamente* n *puntos, entonces todo punto tiene exactamente* $n + 1$ *rectas que pasan sobre él.*

T4. *Si toda recta contiene exactamente* n *puntos, entonces hay exactamente* n^2 *puntos y* $n(n + 1)$ *rectas en la geometría.*

Definición 1. Dos rectas que no tengan ningún punto común se dice que son *paralelas.*

T5. *Si una recta es paralela a una de dos rectas que se cortan, cortará a la otra.*

T6. *Si la recta* p *es paralela a la* q *y la* q *es paralela a la* r, *entonces la* p *es paralela a la* r.

Definición 2. Si p es una recta, entonces el conjunto de rectas que consisten en p y todas las rectas paralelas a p se llama la *clase paralela* de p, y se designa por $[p]$.

T7. *Si la recta* q *está en* [p], *entonces* [q] = [p].

T8. *Dos clases paralelas o coinciden o no tienen miembros comunes.*

T9. *Si toda recta contiene exactamente* n *puntos, entonces para cada recta* p *la clase* [p] *tiene exactamente* n *miembros.*

T10. *Si se asigna un punto ideal común a todas las rectas de una clase paralela, y si el conjunto de todos los puntos ideales de este tipo se llama una recta ideal, entonces el plano aumentado que contenga todos los puntos y rectas ordinarios e ideales es un plano proyectivo.*

8.7.7 *Una geometría afín finita interesante.* La geometría de Young de 8.7.3 es claramente una geometría afín finita. Como otro ejemplo de una geometría afín finita considérese el siguiente modelo.

Las 25 letras $A, B, C, \cdots, Y$ (que están en el primer bloque del diagrama siguiente) se llamarán *puntos.* Los 30 conjuntos de cinco letras que están en un renglón o en una columna de los siguientes tres bloques se llamarán *rectas.*

A	*B*	*C*	*D*	*E*		*A*	*I*	*L*	*T*	*W*		*A*	*X*	*Q*	*O*	*H*
F	*G*	*H*	*I*	*J*		*S*	*V*	*E*	*H*	*K*		*R*	*K*	*I*	*B*	*Y*
K	*L*	*M*	*N*	*O*		*G*	*O*	*R*	*U*	*D*		*J*	*C*	*U*	*S*	*L*
P	*Q*	*R*	*S*	*T*		*Y*	*C*	*F*	*N*	*Q*		*V*	*T*	*M*	*F*	*D*
U	*V*	*W*	*X*	*Y*		*M*	*P*	*X*	*B*	*J*		*N*	*G*	*E*	*W*	*P*

La noción de *un punto sobre una recta* y *una recta sobre un punto* tendrá la interpretación evidente.

Dejaremos al lector la tarea directa de demostrar que el modelo es realmente un ejemplo de una geometría afín finita, y formularemos ahora las siguientes definiciones.

Definición 1. Por la *distancia,* Z_1Z_2, entre dos puntos Z_1 y Z_2 sobre una recta p, se indica el mínimo número de pasos que hay que dar en la recta p para ir de un punto a otro, en la que la primera letra de dicha recta se considera que sigue a la última letra de ella. (Así, en la recta $ABCDE$, la distancia $DB = 2$ y la distancia $AE = 1$.)

Definición 2. Dos pares de puntos, Z_1, Z_2 y Z_3, Z_4, son *congruentes,* y escribimos $Z_1Z_2 = Z_3Z_4$, si ambos están sobre renglones o ambos están sobre rectas de columna y si distancia Z_1Z_2 = distancia Z_3Z_4. (Por tanto, $AC = RD$ y $DS = KG$.)

Definición 3. Una recta q es *perpendicular* a otra p si existen dos puntos, Z_1 y Z_2, sobre p tales que para cada punto Z sobre q, $ZZ_1 = ZZ_2$. Por tanto, la recta $AFKPU$ es perpendicular a la $ABCDE$, porque podemos tomar $Z_1 = B$, $Z_2 = E$.)

Puede demostrarse que un número sorprendente de teoremas de la geometría plana euclidiana se verifica en esta geometría finita. Por ejemplo, tenemos:

T1. *Por un punto dado hay una perpendicular única a una recta dada.*

T2. *Las tres alturas de un triángulo concurren en un punto α.*

T3. *Las mediatrices de los tres lados de un triángulo concurren en un punto β.*

T4. *Las tres medianas de un triángulo concurren en un punto γ.*

T5. *Los tres puntos α, β, γ de* T2, T3, T4 *son colineales y tales que γ divide al segmento $\alpha\beta$ en la razón* 2:1.

Puede desarrollarse una teoría extensa de paralelogramos y cuadriláteros. Hay equivalencias de lugares geométricos tales como circunferencias, parábolas, elipses e hipérbolas. Como ejemplo, el teorema *El lugar geométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas de una parábola es una recta perpendicular a la directriz de la parábola,* continúa verificándose. Una teoría de áreas puede formularse.

PROBLEMAS

8.7–1 Considérense los siguientes postulados:

P1. *Hay exactamente un punto sobre dos rectas distintas.*

P2. *Todo punto está exactamente sobre un par de rectas.*

P3. *Hay exactamente cuatro rectas.*

a) Establézcase la compatibilidad absoluta del conjunto de postulados anterior.

b) Establézcase la independencia del conjunto de postulados anterior.

c) Dedúzcanse los siguientes teoremas a partir del conjunto de postulados anterior.

T1. *Hay exactamente seis puntos.*

T2. *Hay exactamente tres puntos sobre cada recta.*

DEFINICIÓN. Dos puntos que no tienen ninguna recta común se llaman *paralelos.*

T3. *Cada punto tiene exactamente un punto paralelo a él.*

T4. *Sobre una recta que no contenga un punto dado hay uno y sólo un punto que es paralelo al punto dado.*

8.7–2 a) Demuéstrese que el conjunto de postulados de 8.7.3 es independiente.

b) Trátese de establecer los teoremas de 8.7.3.

8.7–3 a) Demuéstrese que el conjunto de postulados de 8.7.4. es independiente.

b) Trátese de establecer los teoremas de 8.7.4.

8.7–4 a) Demuéstrese que los postulados de 8.7.5 son independientes.

b) Trátese de establecer los teoremas de 8.7.5.

8.7–5 a) Demuéstrese que los postulados de 8.7.6 son independientes.

b) Trátense de establecer los teoremas de 8.7.6.

8.7–6 a) Dado un ejemplo en el modelo de 8.7.7 de los teoremas T1 a T5.

b) ¿Es la recta *ABCDE* perpendicular a la *AFKPU*?

c) Demuéstrese que todo segmento tiene un punto medio.

d) Hállense los puntos sobre la circunferencia con centro *A* y que pasen por el punto *B*.

e) Hállense los puntos de la circunferencia con centro en *A* y que pasen por el punto *C*.

f) Demuéstrese que el triángulo *ABJ* es isósceles, con el vértice en *B*, y que la altura desde *B* biseca la base *AJ*.

g) Compruébense, con ejemplos de este modelo, los siguientes teoremas:

1) Si un par de lados de un cuadrilátero son congruentes y paralelos, entonces también lo son los del otro par.

2) Las diagonales de un paralelogramo se bisecan.

3) Las diagonales de un rombo son perpendiculares.

4) Hay una tangente única a una circunferencia en cada punto de ésta.

BIBLIOGRAFIA

BLUMENTHAL, L. M., *A Modern View of Geometry*. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1961.

BIRKHOFF, G. D., y RALPH BEATLEY, *Basic Geometry*. Chicago: Scott, Foresman and Company, 1940.

BORSUK, KAROL, y WANDA SZMIELEW, *Foundations of Geometry*, tr. por Erwin Marquit. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1960.

BRUMFIEL, C. F., R. E. EICHOLZ, y M. E. SHANKS, *Geometry*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1960.

CURTIS, C. W., P. H. DAUS, y R. J. WALKER, *Euclidean Geometry Based on Ruler and Protractor Axioms*. New Haven, Conn.: School Mathematics Study Group, 1959.

EVES, HOWARD, y C. V. NEWSOM, *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. Nueva York: Holt, Rinehart and Winston, 1958.

FORDER, H. G., *Geometry*. Nueva York: Hutchinson's University Library, 1950.

———, *The Foundations of Euclidean Geometry*. Nueva York: Cambridge University Press, 1927.

GOODSTEIN, R. L., y E. J. F. PRIMROSE, *Axiomatic Projective Geometry*. Leicester: University College, 1953.

HALSTED, G. B., *Rational Geometry*. Nueva York: John Wiley and Sons, Inc., 1904.

HEATH, T. L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 2ª ed., 3 vols. Nueva York: Cambridge University Press, 1926. Reimpreso por Dover Publications, Inc., 1956.

HILBERT, DAVID, *The Foundations of Geometry*, tr. por E. J. Townsend. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1902.

IVINS, JR., W. M., *Art and Geometry, a Study in Space Intuitions. Cambridge,* Mass.: Harvard University Press, 1946.

KEYSER, C. J., *Mathematical Philosophy*. Nueva York: E. P. Dutton and Company, Incorporated, 1922.

———, *Mathematics and the Questions of Cosmic Mind, with Other Essays*. The Scripta Mathematica Library, núm. 2. Nueva York: Scripta Mathematica, 1935.

LEVI, HOWARD, *Foundations of Geometry and Trigonometry*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1960.

MACH, ERNST, *Space and Geometry*, tr. por T. J. McCormack. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1906.

MESERVE, B. E., *Fundamental Concepts of Geometry*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1955.

MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1963.

PRENOWITZ, WALTER, *A Contemporary Approach to Classical Geometry*. Herbert Ellsworth Slaught Memorial Paper núm. 9. Buffalo, N. Y.: Mathematical Association of America, 1961.

ROBINSON, G. DE B., *The Foundations of Geometry*. Toronto: University of Toronto Press, 1946.

RUSSELL, B. A. W., *An Essay on the Foundations of Geometry*. Nueva York: Dover Publications, Inc., 1956.

SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP, *Mathematics for High School, Geometry (Partes 1 y 2)*. New Haven, Conn.: School Mathematics Study Group, 1959.

STABLER, E. R., *An Introduction to Mathematical Thought*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1953.

VEBLEN, OSWALD, y J. W. YOUNG, *Projective Geometry*, 2 vols. Boston: Ginn and Company, 1910, 1918.

WYLIE, C. R., JR., *Foundations of Geometry*. Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1964.

YOUNG, J. W., *Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry*. Nueva York: The Macmillan Company, 1911.

———, ed., *Monographs on Topics of Modern Mathematics Relevant to the Elementary Field*. Nueva York: Longmans, Green and Company, 1911. Reimpreso por Dover Publications, Inc., 1955.

APENDICE 1

PRIMEROS PRINCIPIOS DE EUCLIDES Y ENUNCIADOS DE LAS PROPOSICIONES DEL LIBRO I *

LAS EXPLICACIONES Y DEFINICIONES INICIALES

1. Un *punto* es lo que no tiene parte o dimensión.
2. Una *línea* es una longitud sin anchura.
3. Los extremos o límites de una línea son puntos.
4. Una *recta* es una línea que tiene todos sus puntos en la misma dirección.
5. Una *superficie* es la que sólo tiene longitud y anchura.
6. Los extremos o límites de una superficie son líneas.
7. Una *superficie plana* es la que contiene una recta en cualquier posición.
8. Un *ángulo plano* es la inclinación entre sí de dos líneas de un plano si éstas se cortan y no están en una misma recta.
9. Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo se dice que es *rectilíneo.*
10. Cuando una recta se levanta sobre otra formando ángulos adyacentes iguales, cada uno de los ángulos iguales se llama *ángulo recto,* y la recta que se eleva sobre la otra se llama *perpendicular* a esta otra.
11. Un *ángulo obtuso* es mayor que uno recto.
12. Un *ángulo agudo* es menor que uno recto.
13. Un *límite* es lo que constituye un extremo de alguna cosa.
14. Una *figura* es lo que está contenido en un límite o en varios límites.

* Tomado, con autorización, de T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* 3 vols., 2ª ed. Nueva York: The Cambridge University Press, 1926. Reimpresión, Nueva York: Dover Publications, Inc., 1956.

15. Un *círculo* es una figura plana contenida en una línea, llamada *circunferencia,* tal que todas las rectas que van desde un punto particular hasta puntos de ella, quedando dentro de la figura, son iguales.

16. El punto particular (de la definición 15) se llama *centro* de la circunferencia o del círculo.

17. Un *diámetro* de un círculo o de una circunferencia es una recta que pasa por su centro y termina, en ambos sentidos, en la circunferencia. Dicha recta biseca además a la circunferencia y al círculo.

18. Un *semicírculo* es la figura contenida entre un diámetro y una semicircunferencia, o sea, la mitad de la circunferencia cortada por él. El centro del semicírculo es el mismo que el del círculo.

19. *Figuras rectilíneas* son las contenidas entre rectas, figuras *trilaterales* (o triángulos) son las contenidas entre tres, cuadrilaterales (o *cuadriláteros)* las contenidas entre cuatro y las multilaterales (o *polígonos)* las contenidas entre más de cuatro rectas.

20. De las figuras trilaterales, un *triángulo equilátero* es aquel cuyos tres lados son iguales, un *triángulo isósceles* tiene dos de sus lados iguales y un *triángulo escaleno* tiene sus tres lados desiguales.

21. Además, de las figuras trilaterales, un *triángulo rectángulo* es la que tiene un ángulo recto, un *triángulo obtusángulo* la que tiene un *ángulo obtuso,* y un *triángulo acutángulo* la que tiene sus tres ángulos agudos.

22. De las figuras cuadrilaterales, un *cuadrado* es la que es equilátera y sus ángulos son rectos; un *cuadrilongo* es la que tiene todos sus ángulos rectos pero no es equilátera; un *rombo* es la equilátera pero sin ángulos rectos, y un *romboide* la que tiene sus lados y ángulos opuestos iguales unos a otros pero no es ni equilátera ni tiene ángulos rectos. Los cuadriláteros distintos de los anteriores se llaman *trapecios* o *trapezoides,* según que tengan un par de lados paralelos o no tengan ninguno.

23. Rectas *paralelas* son las que, estando en el mismo plano y prolongándolas indefinidamente en ambos sentidos, no se cortan ni en uno ni en el otro sentido.

LOS POSTULADOS

Considérense los siguientes postulados:

1. Una recta puede trazarse desde un punto cualquiera hasta otro.

2. Una recta finita puede prolongarse continuamente y hacerse una recta ilimitada o indefinida.

3. Una circunferencia puede describirse con un centro y una distancia.

4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

5. Si una recta que corte a otras dos forma con éstas ángulos interiores del mismo lado de ella que sumados sean menores que dos rectos, las dos

rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortarán del lado en que dicha suma de ángulos sea menor que dos rectos.

LOS AXIOMAS O NOCIONES COMUNES

1. Las cosas que sean iguales a la misma cosa también son iguales entre sí.
2. Si a cantidades iguales se suman otras también iguales, los totales serán iguales.
3. Si se restan cantidades iguales de otras también iguales, los residuos serán iguales.
4. Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.
5. El todo es mayor que una parte.

LAS CUARENTA Y OCHO PROPOSICIONES DEL LIBRO I

1. Dada una recta finita, constrúyase un triángulo equilátero.
2. Colóquese a partir de un punto dado (como extremo) una recta igual a otra dada.
3. Dadas dos rectas desiguales, córtese o sepárese de la mayor una recta igual a la menor.
4. Si dos triángulos tienen dos lados de uno iguales respectivamente a dos del otro, y los ángulos comprendidos por dichas parejas de rectas son iguales, también tendrán la base de uno igual a la del otro, un triángulo será igual al otro, y los ángulos restantes de uno serán iguales a los restantes del otro, respectivamente, es decir, que serán iguales los opuestos a lados iguales.
5. En los triángulos isósceles, los triángulos de la base son iguales entre sí, y si las rectas iguales se prolongan, los ángulos que están bajo la base serán también iguales.
6. Si en un triángulo dos ángulos son iguales, los lados opuestos a los ángulos iguales también serán iguales.
7. Dadas dos rectas trazadas sobre otra (a partir de sus extremos) y que se corten en un punto, no pueden trazarse sobre la misma recta (a partir de sus extremos), y del mismo lado de ella, otras dos rectas que se corten en otro punto y que sean iguales a las anteriores respectivamente, es decir, cada una igual a la que pase por el mismo extremo.
8. Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a otros dos del otro, y además tienen sus bases iguales, tendrán también iguales los ángulos opuestos a las rectas iguales.
9. Biséquese un ángulo rectilíneo dado.
10. Biséquese una recta finita dada.

11. Trácese una recta perpendicularmente a otra dada desde un punto de ésta.

12. Trácese una recta perpendicular a otra infinita dada, desde un punto que no esté sobre esta última.

13. Si se traza una recta sobre otra, formando ángulo, formará dos ángulos rectos o bien ángulos cuya suma sea igual a dos ángulos rectos.

14. Si con una recta cualquiera, y pasando por un punto sobre ella, dos rectas, que no estén al mismo lado de la primera, forman ángulos adyacentes cuya suma sea igual a dos rectos, las dos rectas serán una continuación de la otra constituyendo una sola recta.

15. Si dos rectas se cortan, forman ángulos opuestos por el vértice iguales entre sí.

16. En un triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo exterior es mayor que cualquiera del interior y que el opuesto.

17. En un triángulo dado la suma de dos ángulos cualesquiera es menor que dos rectos.

18. En un triángulo, el lado mayor se opone al ángulo mayor.

19. En un triángulo, el ángulo mayor es opuesto al lado mayor.

20. En un triángulo, la suma de dos lados cualesquiera es mayor que el otro lado.

21. Si sobre uno de los lados de un triángulo, y a partir de sus extremos, se trazan dos rectas que se corten dentro del triángulo, la suma de las rectas así trazadas será menor que la suma de los dos lados restantes del triángulo, pero el ángulo que comprendan será mayor.

22. Con tres rectas, que sean iguales a tres rectas dadas, constrúyase un triángulo; por tanto, es necesario que la suma de dos cualesquiera de ellas sea mayor que la restante.

23. Sobre una recta dada y con vértice en un punto de ella, constrúyase un ángulo rectilíneo igual a otro dado.

24. Si dos triángulos tienen dos lados de uno iguales, respectivamente a dos del otro, pero uno de los ángulos comprendidos por una de las parejas de lados es mayor que el de la otra, también tendrá la base mayor el triángulo de la pareja de mayor ángulo.

25. Si dos triángulos tienen dos lados de uno iguales, respectivamente, a dos del otro, pero la base del primero es mayor que la del segundo, el ángulo de la primera pareja de rectas será mayor que el de la segunda.

26. Si dos triángulos tienen dos ángulos de uno iguales, respectivamente, a dos del otro, y un lado igual a otro, es decir, iguales cualquiera de los lados, de uno y otro, adyacentes a los mismos ángulos iguales, o sea, los opuestos en ambos a uno de los ángulos iguales, también tendrán los lados

restantes del uno iguales a los lados restantes del otro y el ángulo restante igual al ángulo restante.

27. Si una recta que atraviesa a otras dos forma con éstas ángulos alternos iguales, las dos rectas serán paralelas.

28. Si una recta que atraviesa a otras dos forma con una de éstas un ángulo externo igual al interno, con la otra, del mismo lado de la transversal, o si los ángulos internos del mismo lado de ésta son iguales a dos rectos, las dos rectas serán paralelas.

* * * * * *

29. Una recta que atraviesa a otras dos paralelas forma con éstas ángulos alternos iguales, un ángulo externo igual al interno no adyacente del mismo lado de la transversal y los ángulos internos del mismo lado de ésta son suplementarios.

30. Las rectas paralelas a la misma recta son también paralelas entre sí.

31. Trazar por un punto una recta paralela a otra dada.

32. En un triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo formado es igual a la suma de los dos internos no adyacentes, y los tres ángulos internos del triángulo suman dos rectos.

33. Las rectas que unen en la misma dirección los extremos de rectas iguales y paralelas son paralelas e iguales.

34. En áreas paralelográmicas (o sea, encerradas en paralelogramos), los lados y los ángulos opuestos son iguales entre sí y el diámetro, o diagonal, biseca las áreas.

35. Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales.

36. Los paralelogramos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales.

37. Los triángulos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales.

38. Los triángulos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales.

39. Los triángulos iguales que estén sobre la misma base y al mismo lado de ella también están entre las mismas paralelas.

40. Los triángulos iguales que estén sobre bases iguales y al mismo lado de ellas están también entre las mismas paralelas.

41. Si un paralelogramo tiene la base común con la de un triángulo y ambos están entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo.

42. Construir, dentro de un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado.

43. En un paralelogramo, los complementos para formar paralelogramos a un lado u otro de un diámetro, o diagonal, son iguales.

44. A una recta dada aplíquese, dentro de un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado.

45. Constrúyase, dentro de un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada.

46. Constrúyase sobre una recta dada un cuadrado.

47. En triángulos rectángulos el cuadrado sobre el lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que forman el ángulo recto.

48. Si en un triángulo el cuadrado construido sobre uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados sobre los dos lados restantes del triángulo, el ángulo comprendido por los dos lados restantes del triángulo es recto.

APENDICE 2

POSTULADOS DE HILBERT PARA LA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA

TERMINOS PRIMITIVOS

punto, recta, sobre, entre, congruente

GRUPO I: POSTULADOS DE CONEXION

I–1. *Hay una y sólo una recta que pasa por dos puntos distintos dados.*

I–2. *Toda recta contiene al menos dos puntos distintos, y respecto a una recta hay al menos un punto que no está en ella.*

GRUPO II: POSTULADOS DE ORDEN

II–1. *Si el punto* C *está entre los puntos* A *y* B, *entonces* A, B *y* C *están todos sobre la misma recta, y* C *está entre* B *y* A, *y* B *no está entre* C *y* A, *y* A *no está entre* C *y* B.

II–2. *Respecto a dos puntos distintos cualesquiera,* A *y* B, *hay siempre un punto* C *que está entre* A *y* B, *y un punto* D *que es tal que* B *está entre* A *y* D.

II–3. *Si* A, B, C *son tres puntos distintos sobre la misma recta, entonces uno de los puntos está entre los otros dos.*

Definiciones. Por el segmento AB se indican los puntos A y B y todos los que están entre A y B. Los puntos A y B se llaman *puntos extremos* del segmento. Un punto C se dice que está *sobre* el segmento AB si es A o B o algún punto entre A y B.

Definición. Dos rectas, una recta y un segmento, o dos segmentos, se dice que se *cortan* si hay un punto que está en ambos.

DEFINICIONES. Sean *A*, *B*, *C* tres puntos que no están sobre la misma recta. Entonces por el triángulo *ABC* se indican los tres segmentos *AB*, *BC*, *CA*. Los segmentos *AB*, *BC*, *CA* se llaman *lados* del triángulo, y los puntos *A*, *B*, *C*, *vértices* del mismo.

II–4. (Postulado de Pasch). *Una recta que corte a un lado del triángulo pero que no pase por ninguno de sus vértices deberá cortar también al otro lado del triángulo.*

GRUPO III: POSTULADOS DE CONGRUENCIA

III–1. *Si* A *y* B *son puntos distintos y si* A′ *es un punto que está sobre una recta* m, *entonces hay dos y sólo dos puntos distintos,* B′ *y* B″, *sobre* m *tales que el par de puntos* A′, B′ *es congruente al par* A, B *y el par de puntos* A′, B″ *es congruente al par* A, B; *además,* A′ *está entre* B′ *y* B″.

III–2. *Si dos pares de puntos son congruentes al mismo par de puntos, entonces son congruentes entre sí.*

III–3. *Si el punto* C *está entre los puntos* A *y* B *y el* C′ *está entre* A′ *y* B′, *y si el par de puntos* A, C *es congruente al par* A′, C′, *y el par de puntos* C, B *es congruente al par* C′, B′, *entonces el par de puntos* A, B *es congruente al par* A′, B′.

DEFINICIÓN. Dos segmentos se dice que son *congruentes* si los puntos extremos de los segmentos son pares congruentes de puntos.

DEFINICIONES. Por el *rayo AB* se indica el conjunto de todos los puntos que consisten en aquellos que están entre *A* y *B*, el mismo punto *B* y todos los puntos *C* tales que *B* esté entre *A* y *C*. El rayo *AB* se dice que *emana* del punto *A*.

TEOREMA. *Si* B′ *es un punto del rayo* AB, *entonces los rayos* AB′ *y* AB *son idénticos.*

DEFINICIONES. Por *ángulo* se indica un punto (llamado *vértice* del ángulo) y dos rayos (llamados los *lados* del ángulo) que emanan del punto. En virtud del teorema anterior, si el vértice del ángulo es el punto *A* y si *B* y *C* son dos puntos cualesquiera distintos de *A* que están sobre los dos lados del ángulo, podemos sin ambigüedad hablar del ángulo *BAC* (o *CAB*).

DEFINICIONES. Si *ABC* es un triángulo, entonces los tres ángulos *BAC*, *CBA*, *ACB* se llaman *ángulos* del triángulo. El ángulo *BAC* se dice que está *comprendido* por los lados *AB* y *AC* del triángulo.

III–4. *Si* BAC *es un ángulo cuyos lados no están sobre la misma recta, y si* A′ *y* B′ *son dos puntos distintos, entonces hay dos y sólo dos rayos distintos,* A′C′ *y* A′C″, *tales que el ángulo* B′A′C′ *es congruente al* BAC *y el ángulo* B′A′C″ *es congruente al* BAC; *además, si* D′ *es un punto del rayo* A′C′ *y* D′ *es un punto del rayo* A′C″, *entonces el segmento* D′D″ *corta a la recta determinada por* A′ *y* B′.

III–5. *Todo ángulo es congruente consigo mismo.*

III–6. *Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son congruentes, respectivamente, a los dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo, entonces cada uno de los ángulos restantes del primer triángulo es congruente al ángulo correspondiente del segundo.*

GRUPO IV: POSTULADO DE LAS PARALELAS

IV–1 (Postulado de Playfair) *Por un punto dado* A *que no está en una recta* m *pasa a lo más una recta que no corta a* m.

GRUPO V: POSTULADOS DE CONTINUIDAD

V–1 (Postulado de Arquímedes) *Si* A, B, C, D *son cuatro puntos distintos, entonces hay, sobre el rayo* AB, *un conjunto finito de puntos distintos,* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *tal que* 1) *cada uno de los pares* $A, A_1; A_1, A_2; \cdots; A_{n-1}, A_n$ *es congruente al par* C, D, *y* 2) B *está entre* A *y* A_n.

V–2 (Postulado de Completo) *Los puntos de una recta constituyen un sistema de puntos tales que no puede asignarse ningún nuevo punto a la recta sin que se viole al menos uno de los nueve postulados* I–1, I–2, II–1, II–2, II–3, II–4, III–1, III–2, V–1.

GRUPO V EN ALTERNATIVA

Definiciones. Considérese un segmento *AB*. Llamemos a un punto extremo, digamos *A*, el *origen* del segmento y al otro punto, *B*, el *extremo* del segmento. Dados dos puntos distintos *M* y *N* de *AB*, decimos que *M precede* a *N* (o *N sigue* a *M*) si *M* coincide con el origen *A* o está entre *A* y *N*. Un segmento *AB*, considerado en esta forma, se llama *segmento ordenado.*

V′–1. (Postulado de Dedekind) *Si los puntos de un segmento ordenado de origen en* A *y extremo* B *se separan en dos clases de manera que*

1) *cada punto de* AB *pertenezca a una y sólo una de las clases,*
2) *los puntos* A *y* B *pertenezcan a clases distintas (que llamaremos, respectivamente, la* primera *clase y la* segunda *clase),*
3) *cada punto de la primera clase precede a cada punto de la segunda,*

entonces existe un punto C *sobre* AB *tal que todo punto de* AB *que preceda a* C *estará en la primera clase y todo punto de* AB *que siga a* C *estará en la segunda clase.*

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCION DE ALGUNOS DE LOS PROBLEMAS

(Casi todos los problemas numerados pares se dejan sin tocar)

1.2–1 Considérese un cuadrilátero $ABCD$, con $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Demuéstrese que $2K = ad \operatorname{sen} A + bc \operatorname{sen} C \leqq ad + bc$; análogamente, $2K \leqq ab + cd$; por tanto, $4K \leqq ad + bc + ab + cd = (a + c)(b + d)$. Esta fórmula ilustra la idea prevalente, en la geometría empírica primitiva, de promediar.

1.2–9 a) Si r es el radio de la circunferencia, θ la mitad del ángulo en el centro subtendido por la cuerda y A el área buscada, entonces $r = (4s^2 + c^2)/8s$, $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(c/2r)$, $A = r^2\theta + c(s - r)/2$.

1.2–9 b) 3.60 m.

1.3–1 Póngase una barra vertical de longitud s cerca de la pirámide. Sean S_1, P_1 y S_2, P_2 los puntos que marcan las sombras del extremo superior de la barra y del vértice de la pirámide en dos instantes distintos del día. Entonces, si x es la altura buscada de la pirámide, $x = s(P_1P_2)/(S_1S_2)$.

1.3–9 TEOREMA 1. Sea a un miembro de S. Por el P1 existe un club A al que a pertenece. Por el P3 existe un club B conjugado respecto al club A. Como B es no vacío, tiene al menos un miembro b, y $b \neq a$. Por el P2 existe un club C que contiene a y b. Por el P3 existe un club D conjugado respecto al club C. Como D es no vacío, tiene un miembro c, y $c \neq a$, $c \neq b$. Por el P2 existe un club E que contiene a y c. Como c pertenece a E, pero no a C, los clubes C y E son distintos. Por tanto, a pertenece a dos clubes distintos, C y E.

TEOREMA 2. Sea A un club. Como A es no vacío, tiene al menos un miembro a. Supongamos que a es el único miembro de A. Por el T1, existe un club B distinto del A y que contiene a a como miembro. Ahora bien,

B tiene que contener un segundo miembro $b \neq a$, pues de otra forma los clubes A y B no podrían ser distintos. Por el P3 existe un club C tal que B es conjugado respecto a C. Se deduce entonces que A también es conjugado respecto a C. Pero esto contradice el P3. En consecuencia, el teorema se ha demostrado por *reducción al absurdo*.

TEOREMA 3. Por la demostración del T1 vimos la existencia en S de al menos dos personas distintas, a y b. Por el P2 existe un club A al que a y b pertenecen. Por el P3 existe un club B conjugado respecto al A. Pero, por el T2, B debe contener al menos dos miembros distintos, c y d. Como A y B son conjugados, se deduce que a, b, c, d son cuatro personas distintas de S.

1.4–5 b) Véase L. S. Shively, *An Introduction to Modern Geometry* (John Wiley and Sons, Inc.), pág. 141, o Nathan Altshiller-Court, *College Geometry* (Barnes and Noble, Inc.), págs. 72-73.

1.4–9 h) Desígnense las partes por x y $a - x$. Entonces, $x^2 - (a - x)^2 = x(a - x)$, o sea, $x^2 + ax - a^2 = 0$.

1.5–1 c) $h_c = b \operatorname{sen} A$.

1.5–1 f) $h_a = t_a \cos[(B - C)/2)]$.

1.5–1 g) $4h_a^2 + (b_a - c_a)^2 = 4m_a^2$.

1.5–1 h) $b_a - c_a = 2R \operatorname{sen} (B - C)$.

1.5–1 i) $4R(r_a - r) = (r_a - r)^2 + a^2$. Si M y N son los puntos medios del lado BC y del arco BC, entonces $MN = (r_a - r)/2$; claramente dos cualesquiera de R, a y MN determinan la tercera.

1.5–1 j) $h_a = 2rr_a/(r_a - r)$.

1.5–2 b) Véase el problema 3336, *The American Mathematical Monthly,* agosto de 1929.

1.5–2 c) Véase el problema E 1447, *The American Mathematical Monthly,* septiembre de 1961. La resolución dada en esta referencia es una aplicación singularmente fina del método de datos.

1.5–3 b) Sea M el punto medio de BC. La línea quebrada EMA biseca el área. Por M trácese MN paralela a AE hasta que corte al lado del triángulo ABC en N. Entonces EN es la recta buscada.

1.5–5 Véase, por ejemplo, G. A. Wentworth, *Plane and Solid Geometry,* edición revisada, 1889, Ginn and Co.

1.5–7 e) El volumen del segmento es igual al volumen de un sector esférico menos el volumen de un cono. Así mismo, $a^2 = h(2R - h)$.

1.5–7 f) El segmento es la diferencia de dos segmentos, cada uno de una base, y que tienen, digamos, las alturas u y v. Entonces

$$\begin{aligned} V &= \pi R(u^2 - v^2) - \pi(u^3 - v^3)/3 \\ &= \pi h[(Ru + Rv) - (u^2 + uv + v^2)/3]. \end{aligned}$$

Pero $u^2 + uv + v^2 = h^2 + 3uv$, $(2R - u)u = a^2$, $(2R - v)v = b^2$. Por consiguiente,

$$V = \pi h[(a^2 + b^2)/2 + (u^2 + v^2)/2 - h^2/3 - uv]$$
$$= \pi h[(a^2 + b^2)/2 + h^2/2 + uv - h^2/3 - uv], \text{ etc.}$$

1.5–9 b) Represéntense AB por a, AC por b, BC por C, y $\sphericalangle ADB$ por θ. Entonces, por la ley de los senos, aplicado primero al triángulo BCD y luego al ABD,

$$\text{sen } 30^\circ/\text{sen } \theta = a/c, \qquad \text{sen } \theta/\text{sen } 120^\circ = a(b + a).$$

Consecuentemente, $1/\sqrt{3} = \text{tg } 30^\circ = a^2/c(b + a)$. Elevando ambos miembros al cuadrado y recordando que $c^2 = b^2 - a^2$, vemos que $2a^3(2a + b) = b^3(2a + b)$, o sea, $b^3 = 2a^3$.

1.5–17 a) Por los triángulos semejantes de DFB y DBO, $FD/DB = DB/OD$. Por tanto, $FD = (DB)^2/OD = 2(AB)(BC)/(AB + BC)$.

1.5–17 b) Por triángulos rectángulos semejantes, $OA/OB = AF/BD = AF/BE = AC/CB = (OC - OA)/(OB - OC)$. Ahora hállese OC.

1.5–17 f) Tenemos $ax \text{ sen } 60^\circ + bx \text{ sen } 60^\circ = ab \text{ sen } 120^\circ$.

1.5–18 Para una aplicación muy clara de este teorema al establecimiento de la desigualdad de Erdos-Mordell: "Si P es cualquier punto del interior o del perímetro del triángulo ABC y si p_a, p_b, p_c son las distancias de P a los lados del triángulo, entonces $PA + PB + PC \geqq 2(p_a + p_b + p_c)$", consúltese N. D. Kazarinoff, *Geometrical Inequalities,* Random House (1961), págs. 84-87.

1.6–1 a) $x = hd/(2h + d)$.

1.6–1 b) 360 cm y 45 cm.

1.6–1 c) 900 cm.

1.6–3 b) Como el cuadrilátero tiene un círculo inscrito, tenemos $a + c = b + d = s$. Por tanto, $s - a = c$, $s - b = d$, $s - c = a$, $s - d = b$.

1.6–3 c) En la figura S1 tenemos

$$a^2 + c^2 = r^2 + s^2 + m^2 + n^2 - 2(rn + sm) \cos \theta,$$
$$b^2 + d^2 = r^2 + s^2 + m^2 + n^2 + 2(sn + rm) \cos \theta.$$

Por tanto, $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ si y sólo si $\cos \theta = 0$, o sea, $\theta = 90^\circ$.

1.6–3 d) Utilícese 1.6–3 (c).

1.6–3 e) Los lados consecutivos de un cuadrilátero son 39, 60, 52 y 25; las diagonales son 56 y 63; el diámetro de la circunferencia circunscrita es 65; el área es 1 764.

1.6–5 b) $x = 2.3696$.

1.6–5 c) $x = 4.4934$.

1.6–7 a) Hállese z tal que $b/a = a/z$, luego m, de modo que $n/z = a/m$.

1.6–11 a) La siguiente es esencialmente la solución dada por Regiomontano. Se nos da (fig. S2) $p = b - c$, h, $q = m - n$. Ahora bien, $b^2 - m^2 = h^2 = c^2 - n^2$, o sea, $b^2 - c^2 = m^2 - n^2$, o bien, $b + c = qa/p$. Por tanto,

$$b = (qa + p^2)/2p \quad \text{y} \quad m = (a + q)/2.$$

Sustituyendo estas expresiones en la relación $b^2 - m^2 = h^2$ se tiene una ecuación cuadrática en la incógnita a.

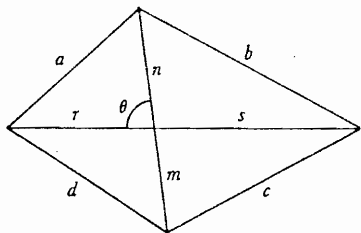


FIG. S1

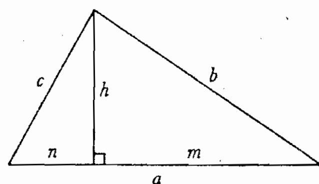


FIG. S2

1.6–11 b) A continuación se da esencialmente la solución por Regiomontano. Aquí se nos dan (fig. S2) a, h, $k = c/b$. Hágase $2x = m - n$. Entonces,

$$4n^2 = (a - 2x)^2, \qquad 4c^2 = 4h^2 + (a - 2x)^2,$$
$$4m^2 = (a + 2x)^2, \qquad 4b^2 = 4h^2 + (a + 2x)^2.$$

Luego $k^2[4h^2 + (a + 2x)^2] = 4h^2 + (a - 2x)^2$. Con esta cuadrática se puede determinar x, y, en consecuencia, b y c.

1.6–11 c) Sobre AD prolongada (fig. S3) tómese $DE = bc/a$, la cuarta proporcional de los segmentos dados a, b, c. Entonces, los triángulos DCE y BAC son semejantes y $CA/CE = a/c$. Por tanto, C se localiza por la intersección de dos lugares geométricos, una circunferencia de Apolonio y una circunferencia con centro en D y radio c.

1.7–1 No, pero la inducción puede emplearse para conjeturar la proposición a la que se aplica el procedimiento.

1.7–7 No. Sólo en los llamados *tetraedros ortocéntricos* concurren las cuatro alturas. Un tetraedro ortocéntrico es aquel en que cada arista es perpendicular a la opuesta, o no adyacente.

1.7–9 En los tres primeros casos aparecen los coeficientes binomiales. Por tanto, es probable que el pentatope tenga 5 elementos limitadores cerodimensionales, 10 unidimensionales, 10 bidimensionales y 5 tridimensionales.

1.7–11 a) Paralelepípedo, paralelepípedo rectangular (caja), esfera.

1.7–11 b) Prisma, prisma recto, esfera.

1.7–13 En lugar de las rectas conjugadas isogonales de un ángulo plano, considérense los *planos conjugados isogonales* de un ángulo diedro.

1.7–15 La lista no puede continuarse: no hay poliedro convexo cuyas caras sean todas hexágonos. De hecho, puede demostrarse que un poliedro convexo tiene que tener algunas caras con menos de seis lados.

1.7–17 b) Sea D un punto sobre la superficie de P tal que la distancia a CD sea mínima. Demuéstrese que D no puede estar ni en el vértice de P ni en una arista de P, y que CD es perpendicular a la cara F de P sobre la que está D.

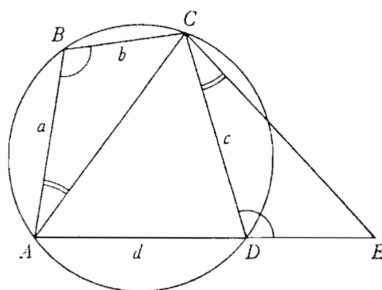


Fig. S3

1.7–19 Trácense, en cartulina, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ como cuerdas sucesivas de una circunferencia tan grande que la línea poligonal formada por las cuerdas no se cierre ni se cruce. Córtese el polígono limitado por la línea poligonal y los radios de los puntos extremos de dicha línea. Dóblese la cartulina por los otros $n - 1$ radios y péguense los dos radios extremos, obteniendo una superficie poliédrica abierta. Empújense suavemente las n aristas libres (o sea, por las que pasen más que una cara) contra un plano, formando así una pirámide isósceles.

1.7–20 Véase el problema E 753. *The American Mathematical Monthly,* agosto-septiembre de 1947.

2.1–1 Utilícese el teorema 2.1.3 junto con la inducción matemática.

2.1–5 Háganse $\overline{AA'} = \overline{OA'} - \overline{OA} = (\overline{O'A'} - \overline{O'O}) - \overline{OA}$, etc.

2.1–11 Utilícese el teorema 2.1.9.

2.1–13 Considérese primero el caso en que P esté en la recta y tómese P como origen; luego supóngase que P' es el pie de la perpendicular bajada desde P a la recta.

2.1–15 Utilícese el teorema de Stewart.

2.1–16 Por el problema 2.1–15, $t_a^2 = bc[1 - a^2/(b+c)^2]$, $t_a^2 = ca[1 - b^2/(c+a)^2]$. Demuéstrese que $t_a^2 - t_b^2 = (a-b)f(a,b,c)$, donde $f(a,b,c)$ sólo contiene términos positivos.

2.1–17 Utilícese el teorema de Stewart.

2.1–18 Este problema es una generalización del problema de Stewart en que el punto P se sustituye por una circunferencia.

2.1–19 a) Supongamos que la recta corte a OA, OB, OC, OD en A', B', C', D'. Aplíquese el teorema de Euler a A', B', C', D'. Multiplíquese todo por p^2, donde p es la perpendicular desde O a la recta $A'B'C'D'$. Sustitúyase $p\ \overline{A'B'}$ por $(OA')(OB')$ sen $\overline{A'OB'}$, etc.

2.1–19 b) $2\Delta\overline{AOB} = (OA)(OB)$ sen $\overline{AOB}$, etc. Ahora empléese el problema 2.1–19 (a).

2.1–21 Considérense tres casos: primero en el que O esté en el interior del triángulo ABC, luego en el que O esté dentro del $\sphericalangle BAC$, pero en el otro lado de BC de A, luego en el que O esté dentro del ángulo opuesto por el vértice al $\sphericalangle BAC$.

2.1–23 Considérese la ecuación en que A se sustituya por un punto variable X de la recta. Tómese un origen O en la recta y hállese una ecuación cuadrática en $x = OX$. Tómese $X = B, C, D$ sucesivamente, obteniendo así tres identidades. Entonces, la ecuación cuadrática tendrá tres raíces distintas y, por tanto, será una identidad. Esto es, X puede ser un punto de la recta, por ejemplo, el A.

2.2–3 Cada uno se desprende del teorema 2.2.5 o de la convención 2.2.4. Por tanto, el teorema (a) se convierte en: "Por un punto dado hay uno y sólo un plano que contenga la recta ideal de un plano dado que no pase por dicho punto", y ésta es una consecuencia inmediata del teorema 2.2.5. El teorema (b) se convierte en: "Dos rectas que cortan a una tercera en su punto ideal, se cortan en sus puntos ideales", y esto se deduce de la convención 2.2.4.

2.2–5 Multiplíquese la identidad del problema 2.1–23 por $\overline{AD}$ y luego tómese D como un punto ideal.

2.2–6 Divídase la identidad del problema 2.1–23 por $\overline{AQ}$ y luego tómese Q como un punto ideal.

2.3–11 Sean D, E, F los puntos de intersección de las tangentes en A, B, C con sus lados opuestos. Entonces, los triángulos ABD y CAD son semejantes y $\overline{BD}/\overline{DC} = -\overline{BD}/\overline{CD} = -(BD)^2/(\overline{BD})(\overline{CD}) = -(BD)^2/(AD)^2 = -c^2/b^2$, etc. O bien, obténgase el resultado como un caso especial del teorema del "hexagrama místico" de Pascal, considerando a ABC como un hexágono con dos vértices que coinciden dos en A, dos en B y dos en C.

O bien, utilícese el hecho de que, por el teorema 2.3–6, el triángulo dado y el formado por las tangentes son copolares.

2.3–13 Utilícese el problema 2.1–12.

2.3–15 Supongamos que DD', $A'B$ se corten en E y $A'D'$, BD en G. Entonces, utilizando el teorema de Menelao sobre el triángulo $GA'B$ y la transversal $D'DE$ vemos que

$$(\overline{BD}/\overline{DG})(\overline{GD'}/\overline{D'A'})(\overline{A'E}/\overline{EB}) = -1.$$

Pero $\overline{BD} = \overline{CA}$, $\overline{GD'} = \overline{BB'}$, $\overline{DG} = \overline{AA'}$, $\overline{D'A'} = \overline{B'C}$. Por tanto,

$$(\overline{CA}/\overline{AA'})(\overline{A'E}/\overline{EB})(\overline{BB'}/\overline{B'C}) = -1$$

2.3–17 Los triángulos CAC' y $B'AB$ son congruentes, de donde sen ACC'/sen $B'BA$ = sen ACC'/sen $CC'A = AC'/CA = AB/CA$, etc.

2.3–19 Supongamos que CE corte a AB en T, AD corte a CB en S y la altura desde B corte a AC en R. Entonces, $AT/TB = EA/BC = AB/BC$, $BS/SC = AB/CD = AB/BC$, $CR/RA = (BC/AB)^2$.

2.3–21 Utilícese la inducción matemática. El recíproco no se verifica. Un recíproco correcto es: Si la relación se verifica y si $n - 1$ de los puntos A', B', C', D', $\cdots$ son colineales, entonces todos los n de ellos son colineales.

2.3–23 Supongamos que el plano corte a la recta DB en el punto P. Utilícese el teorema de Menelao sobre el triángulo ABD con la transversal $D'A'P$ y sobre el triángulo CBD con la transversal $C'B'P$.

2.3–25 Multiplíquense los resultados obtenidos al aplicar el teorema de Menelao a los triángulos ABC, FBD, ECD, ECD, AFE, AFE, FBD con las transversales DEF, AX, AX, BY, BY, CZ, CZ, respectivamente.

2.3–27 Tenemos $(\overline{B1}/\overline{1C})(\overline{CB'}/\overline{B'A})(\overline{A2}/\overline{2B}) = -1$, $(\overline{BA'}/\overline{A'C})(\overline{C3}/\overline{A3})(\overline{A2}/\overline{2B}) = -1$, $(\overline{AC'}/\overline{C'B})(\overline{B4}/\overline{4C})(\overline{C3}/\overline{3A}) = -1$, $(\overline{CB'}/\overline{B'A})(\overline{A5}/\overline{5B})(\overline{B4}/\overline{4C}) = -1$, $(\overline{BA'}/\overline{A'C})(\overline{C6}/\overline{6A})(\overline{A5}/\overline{5B}) = -1$, $(\overline{AC'}/\overline{C'B})(\overline{B7}/\overline{7C})(\overline{C6}/\overline{6A}) = -1$. Multiplíquense la primera, la quinta y la tercera de estas ecuaciones; divídase por el producto de las otras tres; obténgase $(\overline{B1}/\overline{C1})(\overline{C7}/\overline{B7}) = 1$, de donde $1 \equiv 7$.

2.3–29 En la figura del problema 2.3–28 trácese una esfera con centro en O que corte a OA', OB', OC', OD', OE', OF' en A, B, C, D, E, F.

2.4–5 Sobre una recta distinta de l que pase por C tómense A' y B' de modo que $\overline{CA'}/\overline{CB'} = r$. Supongamos que AA' y BB' se corten en D'. Por D' trácese la paralela a CB' hasta que corte a l en D.

2.4–7 Supongamos que FA y DC se corten en T, BC y ED en U, BC y FE en V, y AF y DE en R. Considérense las cuatro tangentes DE, AB, EF y CD. Por el problema 2.4–6, $(RA,FT) = (UB,VC)$, de donde

$D(EA,FC) = D(RA,FT) = E(UB,VC) = E(DB,FC)$. Se deduce ahora, por el corolario 2.4.10, que DA, EB, FC son concurrentes.

2.4–9 Desarróllese y utilícese el teorema de Menelao.

2.4–11 Por el teorema 2.4.2 (3), $(AC,BP) = 1 - m$, $(AC,BQ) = 1 - n$.

2.4–14 Si A, B y C, D se separan, entonces $(AB,CD) = r$, donde $-\infty < r < 0$. Defínase θ de modo que $r = -\text{ctg}^2\,\theta$. Supongamos que las semicircunferencias sobre AB y CD se corten en V. Demuéstrese que el ángulo de intersección de las dos semicircunferencias es 2θ.

2.4–15 La demostración del teorema 2.4.16 que se da en el texto se aplica aquí.

2.5–5 (L) y (M) son alineaciones o series de puntos homográficas. $F(L)$ y $H(M)$ son haces homográficos que tienen FH como recta común.

2.5–9 Utilícese el teorema 2.5.4. Este es el recíproco del problema 2.4–24.

2.5–13 Utilícese el teorema 2.4.14.

2.6–3 b) Sean AB el diámetro, CD la cuerda y P un punto de la circunferencia. Entonces $P(AB,CD) = A(TB,CD)$, donde AT es la tangente en A. Pero $A(TB,CD) = (\text{sen}\,\overline{TAC}/\text{sen}\,\overline{CAB})/(\text{sen}\,\overline{TAD}/\text{sen}\,\overline{DAB})$.

2.6–3 c) $(AC,LM) = B(AC,LM) = B(AC,DE)$. Utilícese ahora la parte (b).

2.6–3 d) Utilícese la parte (b).

2.6–5 Utilícese el problema 2.6–3 (b).

2.6–7 Utilícese el teorema 2.6.11 y el problema 2.6–6.

2.6–9 Utilícense los teoremas de Ceva y Menelao.

2.6–11 Por el teorema 2.6.4, $2/\overline{AB} = 1/\overline{AC} + 1/\overline{AD} = (\overline{AD} + \overline{AC})/(\overline{AC}\cdot\overline{AD}) = 2\overline{AO}/(\overline{AC}\cdot\overline{AD})$.

2.6–13 Supongamos que AB corte a PQ en O. Entonces, O es el punto medio de PQ y $(\overline{OL})(\overline{OM}) = (\overline{OQ})^2$.

2.6–14 Sean R y r los radios de la semicircunferencia y de Σ, respectivamente. Trácese una semicircunferencia concéntrica de radio $R - r$ y obsérvese que r es la media geométrica de $AC - r$ y $CB - r$.

2.6–17 Tenemos $(DB,PV) = -1$, de donde (por el problema 2.6–16) $\overline{XP}/\overline{XV} = (DP)^2/(DV)^2$, con relaciones semejantes para Y y Z. Aplíquese ahora el teorema de Menelao al triángulo PVU.

2.6–19 Tómese O, fuera de la recta ABC, y trácense OA, OB, OC, OP, OQ, OR. Por A trácese AM paralela a OQ, y supongamos que OB, OC, OP, OR corten a AM en B', C', P', R'. Ahora bien, B' es el punto medio de AC', P' es el primer punto de trisección de $B'C'$, R' es el segundo

punto de trisección de AB'. Se deduce que R' es el punto medio de AP', de donde $O(QR,PA) = -1$.

2.6–24 Sea R el conjugado armónico de O con respecto a P y Q. Entonces, el lugar geométrico de R es una recta n que pasa por la intersección de las dos rectas dadas, y $2/\overline{OR} = 1/\overline{OP} + 1/\overline{OQ}$. Trácese ahora la recta n' paralela a n y que pase por el punto medio R' de OR. Entonces, $1/\overline{OR'} = 1/\overline{OP} + 1/\overline{OQ}$, y n' es la recta buscada.

2.6–25 Sustitúyase $1/\overline{OP_1} + 1/\overline{OP_2}$ por $1/\overline{OX_1}$, $1/\overline{OX_1} + 1/\overline{OP_3}$ por $1/\overline{OX_2}$, y así sucesivamente, utilizando el problema 2.6–24.

2.7–9 a) Las alturas son las cuerdas comunes a los pares de circunferencias.

2.7–9 b) Sean A', B', C' los pies de las alturas y H el ortocentro. Entonces, AA', BB', CC' son cuerdas de las tres circunferencias y $(\overline{AH})(\overline{HA'}) = (\overline{BH})(\overline{HB'}) = (\overline{CH})(\overline{HC'})$.

2.7–11 Utilícese el teorema 2.7.16 (1).

2.7–13 La circunferencia pedida es la circunferencia radical de las tres que tienen los puntos dados como centros y las longitudes de las tangentes dadas como radios.

2.7–14 Véase el artículo 113 de *Modern Geometry,* de Johnson, o el artículo 471 del *College Geometry,* de Altshiller-Court (de la bibliografía del Capítulo 2).

2.7–15 a) Una circunferencia concéntrica con la dada.

2.7–15 b) Una circunferencia cuyo centro está a la mitad de la distancia entre los centros de las dadas.

2.7–15 c) Una recta paralela al eje radical de las circunferencias dadas. Utilícese el problema 2.7–14.

2.7–15 d) Una circunferencia coaxial con las circunferencias dadas. Utilícese el problema 2.7–14.

2.7–17 El punto de concurrencia es el centro radical de la circunferencia dada y dos circunferencias cualesquiera del haz coaxial.

2.7–19 Utilícese el teorema 2.7.2 (3).

3.1–1 a) Sobre y biunívoco.

3.1–1 b) No sobre; 3 no es la imagen de ningún elemento de A.

3.1–1 c) No sobre; 2 no es la imagen de ningún elemento de A.

3.1–1 d) No sobre; ningún entero par es la imagen de ningún elemento de A.

3.1–1 e) Sobre y biunívoca.

3.1–1 f) Sobre y biunívoca.

3.1–3 Sean r' un número real y r una raíz real de $x^3 - x = r'$. Entonces, $r \to r'$, de donde el mapeo es sobre. El mapeo no es biunívoco, porque $0 \to 0$ y $1 \to 0$.

3.1–7 $S = IS = (T^{-1}T)S = T^{-1}(TS) = T^{-1}I = T^{-1}$.

3.1–9 $T^{-1}T = I$. Por tanto, por el teorema 3.1.11, $T = (T^{-1})^{-1}$.

3.1–11 $(T_3T_2T_1)^{-1} = [(T_3T_2)T_1]^{-1} = T_1^{-1}(T_3T_2)^{-1} = T_1^{-1}(T_2^{-1}T_3^{-1}) = T_1^{-1}T_2^{-1}T_3^{-1}$.

3.1–13 G1 se satisface por la definición 3.1.5. G2 por el teorema 3.1.9, G3 por el teorema 3.1.10 (1) y G4 por el teorema 3.1.10 (2).

3.2–3 Si $A = A'$, entonces $O = A$. Si $B = B'$, entonces $O = B$. Si $A \neq A'$, $B \neq B'$, y AA' no es paralela a BB', entonces, O es el punto de intersección de las mediatrices de AA' y BB'. Si $A \neq A'$, $B \neq B'$, AA' es paralela a BB' y AB no es colineal con $A'B'$, entonces, O es el punto de intersección de las rectas AB y $A'B'$. Si AB es colineal con $A'B'$, entonces O es el punto medio común de AA' y BB'.

3.2–5 Colóquese un eje x sobre BC con origen en el punto medio de BC.

3.2–9 a), b), c) Se evidencia con una figura.

3.2–11 Se evidencia con una figura.

3.2–13 Sobre la recta O_1O_2 y de modo que $\overline{O_2P} = (1 - k_1)\overline{O_1O_2}/(k_1 - k_2)$.

3.2–19 Utilícese el teorema 3.2.29.

3.2–20 Sea P un punto de la circunferencia de similitud de las dos circunferencias dadas $A(a)$, $B(b)$. Entonces, $PA/PB = a/b$, o $(PA^2 - a^2)/(PB^2 - b^2) = a^2/b^2$. Utilícese ahora el problema 2.7–15 (d). Para una demostración directa que no depende del teorema de potencias de Casey, véase Daus, *College Geometry*, pág. 91.

3.2–21 Utilícese el teorema de Menelao.

3.2–23 Su distancia a A es $k^2c/(k^2 - 1)$, donde $k = a/b$.

3.2–25 b) Tenemos, la potencia de $A_1 = (\overline{A_1M_2})(\overline{A_1H_2}) = (\overline{A_1A_3})(\overline{A_1H_2})/2$. Análogamente, la potencia de $A_1 = (\overline{A_1A_2})(\overline{A_1H_3})/2$. Por consiguiente, la potencia de A_1 es $[(\overline{A_1A_3})(\overline{A_1H_2}) + (\overline{A_1A_2})(\overline{A_1H_3})]/4$.

3.2–27 Sean Y_1, Y_2, Y_3 las imágenes de X_1, X_2, X_3 ante la homotecia $H(H,2)$, que transforma la circunferencia de los nueve puntos en la circunferencia circunscrita. Demuéstrese que el triángulo $Y_1Y_2Y_3$ es equilátero.

3.2–28 Si la recta de Euler es paralela al lado A_2A_3 tenemos $OM_1 = (A_1H_1)/3$, o sea, $R \cos A_1 = (2R \operatorname{sen} A_2 \operatorname{sen} A_3)/3$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita. Esto es, $\cos A_1/\operatorname{sen} A_2 \operatorname{sen} A_3 = 2/3$. Pero $\cos A_1 = -\cos(A_2 + A_3) = \operatorname{sen} A_2 \operatorname{sen} A_3 - \cos A_2 \cos A_3$, etc. Véase tam-

bién el problema E 259, *The American Mathematical Monthly*, octubre de 1937.

3.2–29 La polar trilineal del ortocentro es el eje radical de la circunferencia circunscrita y la circunferencia de los nueve puntos.

3.3–1 a), b) Utilícese el teorema 3.3.7.

3.3–3 a), b) Utilícense los teoremas 3.3.14 y 3.3.16.

3.3–7 Por el teorema 3.3.8 hay exactamente dos isometrías, una directa y otra inversa, que transforman a AB en $A'B'$. Si la isometría es inversa, es (por el teorema 3.39) una reflexión o un deslizamiento-reflexión; en uno u otro caso, los puntos medios de los segmentos PP' están sobre el eje de la transformación. Si la isometría es directa, el resultado se deduce del teorema 3.3.15, degenerando el lugar geométrico en un punto si la isometría es una semivuelta.

3.3–11 Véase el problema 3.3.8.

3.3–13 Los mapeos se relacionan por semejanza no isométrica, o bien (por los teoremas 3.3.14 y 3.3.16), por homología sobre un alargamiento-reflexión.

3.3–15 a) Como $O_2A/O_2A' = O_2B/O_2B' = AA_1/A_1A' = BB_1/B_1B'$, se deduce que O_2A_1 es bisectriz del $\sphericalangle AO_2A'$ y O_2B_1 es bisectriz del $\sphericalangle BO_2B'$. Etcétera.

3.3–15 b) O_2A_2 y O_2B_2 son las bisectrices externas de los ángulos AO_2A' y BO_2B'.

3.3–17 Utilícese el teorema 3.3.15.

3.3–19 $R(l_3)R(l_2)R(l_1)$ es una isometría inversa y por tanto (por el teorema 3.3.9), una reflexión en una recta o un deslizamiento-reflexión. Pero O es un punto invariante.

3.4–5 Inviértase con respecto a A.

3.4–9 Inviértase con respecto a M.

3.4–11 Inviértase con respecto a T.

3.4–13 Inviértase con respecto a A.

3.4–15 Inviértase con respecto a C.

3.5–1 Considérense dos circunferencias ortogonales a C_1 y C_2.

3.5–3 Inviértase con respecto a un punto de una circunferencia C; luego utilícense los teoremas 2.1.5 y 3.4.20.

3.5–5 Inviértase con respecto a D. Entonces, $A'C' + C'B' = A'B'$. Pero, si p' es la distancia de D a la recta $A'B'C'$, tenemos $A'C'/p' = AC/r$. Análogamente, $C'B'/p' = CB/q$, $A'B'/p' = AB/p$. Etc.

3.5–7 Inviértase el sistema coaxial en, un sistema de circunferencias concéntricas, un sistema de rectas concurrentes o un sistema de rectas paralelas.

3.5–11 Utilícese el teorema 3.4.22.

3.5–13 Utilícese el teorema 3.4.20.

3.5–15 Utilícese el teorema 3.4.19 (2).

3.5–16 Utilícese el teorema de Tolomeo.

3.5–17 Sométase la figura a la inversión $I(A,1)$.

3.5–18 Inviértase con respecto a D y luego aplíquese el teorema de Stewart.

3.5–19 b) Sea C_1 la circunferencia ortogonal a la $ABCD$ y que pase por A y C; sea C_2 la circunferencia ortogonal a la $ABCD$ y que pase por B y D. Supóngase que C_1 y C_2 se corten en X y Y. Inviértase con respecto a X.

3.5–22 Tenemos $OP = (BD)(AO)/AB$ y $OP' = (AC)(OB)/AB$, de donde $(OP)(OP') = (BD)(AC)(AO)(OB)/(AB)^2$. Pero $(BD)(AC) = (AD)^2 - (AB)^2$.

3.5–23 Si V es exterior a la circunferencia, inviértase la circunferencia en sí misma con respecto a V como centro de inversión. Si V es interior a la circunferencia, inviértase la circunferencia a su reflexión en V.

3.6–3 Sean O y r el centro y el radio de la circunferencia y Q' al inverso de Q. Entonces, $(PQ)^2 = (OP)^2 + (OQ)^2 - 2(OQ)(OQ)' = (OP)^2 + (OQ)^2 - 2r^2$.

3.6–5 La recta t es la polar del punto T.

3.6–7 a) Sea Q diametralmente opuesto a P en la circunferencia R. Entonces [por el problema 3.6–6 (b)], P y Q son puntos conjugados respecto a K_1, K_2, K_3. Por tanto, los polos de P respecto a K_1, K_2, K_3 pasan todos por Q.

3.6–7 b) Trácese la circunferencia sobre PQ como diámetro. Demuéstrese que esta circunferencia es ortogonal al sistema coaxial. Luego utilícese el problema 3.6–6 (b).

3.6–7 c) Utilícese la parte (b).

3.6–7 d) Utilícese la parte (b).

3.6–7 e) Utilícese el problema 3.6–6 (a) y (b).

3.6–8 Sean P', Q' inversos de P, Q. Demuéstrese que $OP'YQ$ es semejante a $OQ'XP$.

3.6–9 Sea T el punto de contacto de la tangente a la circunferencia inscrita. Entonces, los polos, respecto a la circunferencia inscrita, de AP, BQ, CR son los pies de las perpendiculares desde T a los lados del triángulo determinado por los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con los lados del triángulo ABC.

3.6–13 a) Utilícese el teorema 3.6.12.

3.6–13 b) Utilícense la parte (a) y el problema 3.6–6 (a).

3.6–14 Sean ABC y $A'B'C'$ un par de triángulos conjugados. Supongamos que BC y $B'C'$ se cortan en M y que AA' corta a BC en N y a $B'C'$ en N'. Entonces (por el teorema 3.6.10), $(BC,NM) = A'(C'B',MN) = (B'C',N'M)$. Se deduce ahora que BB', CC', NN' son concurrentes.

3.6–15 Sean A, A'; B, B'; C, C' los tres pares de vértices opuestos del cuadrilátero, y supongamos que A, A'; B, B' son pares de puntos conjugados respecto a la circunferencia. Sea $A''B''C''$ el triángulo conjugado del ABC. Ahora $B''C''$ pasa por A' y $A''C''$ pasa por B'. Pero los triángulos ABC, $A''B''C''$ son copolares (por el problema 3.6–14) y, por tanto, los lados correspondientes se encuentran en tres puntos colineales, dos de los cuales se ve que son A' y B'. Se deduce que C' debe ser el tercer punto. Esto es, $B''A''$ pasa por C', y C y C' son puntos conjugados.

3.7–5 a) Véase la demostración del teorema 3.3.6.

3.7–5 b) Véase la demostración del teorema 3.3.5.

3.7–7 Utilícese el teorema 3.7.4.

3.7–8 Utilícese el problema 3.7–7.

3.7–11 Generalícese la demostración del teorema 3.4.4.

3.7–13 Para la primera parte, generalícense las demostraciones de los teoremas 3.4.10, 3.4.11, 3.4.12, 3.4.13. La segunda parte se desprende, pues la intersección de dos "esferas" es una "circunferencia".

3.7–15 Inviértase con respecto al punto de contacto de S_1 y S_2.

4.1–2 b) Sean A el punto dado y BC el segmento rectilíneo dado. Constrúyase, por la proposición 1, un triángulo equilátero ABD. Trácese la circunferencia $B(C)$ y supongamos que DB prolongada corte a esta circunferencia en G. Trácese ahora la circunferencia $D(G)$ hasta que corte a DA prolongada en L. Entonces, AL es el segmento buscado.

4.1–3 Es una cuestión de existencia; existe un triángulo máximo inscrito en una circunferencia, pero no existe un número natural máximo. Para completar el argumento o razonamiento I, debemos demostrar que *existe* un triángulo máximo inscrito en una circunferencia. El problema ilustra la importancia en matemáticas de los teoremas de existencia.

4.2–5 Localícese el punto por una intersección de ciertas circunferencias de Apolonio.

4.2–7 Sean los puntos dados A y B, y las cuerdas pedidas AC y BD. Sean E, F los puntos medios de AB y CD; sea O el centro de la circunferencia. Entonces, F está en $O(E)$ y en $E(s/2)$, donde $s = AC + BD$.

4.2–9 Localícese el vértice del ángulo por el método de los lugares geométricos.

4.2–11 Trácese una recta paralela a la dada y a una distancia de ésta igual al radio de la circunferencia. Sea P el pie de la perpendicular desde el punto dado a la recta trazada. Trácese ahora una circunferencia

tangente a la paralela en P y que pase por el centro de la circunferencia dada. La circunferencia buscada es concéntrica con esta última.

4.2–13 Utilícese el problema 4.2–12.

4.2–15 Refléjese una de las curvas en la recta dada.

4.2–16 Utilícese el problema 4.2–15.

4.2–17 Sean ABC el triángulo buscado y D, E, F los puntos dados en los lados BC, CA, AB, respectivamente. Pongamos $\overline{BD}/\overline{DC} = m/n$, $\overline{CE}/\overline{EA} = p/q$ y $\overline{AF}/\overline{EB} = r/s$. Hállese F_1 en la recta FE de modo que $\overline{FE}/\overline{EF_1} = q/p$. Hállese luego F_2 en la recta F_1D de modo que $\overline{F_1D}/\overline{DF_2} = n/m$. Entonces, F_2F estará sobre la recta AB. Etc.

4.2–19 Supongamos que la recta y la directriz dadas se encuentran en un punto O; trácese la recta determinada por O y el foco dado, F. Tómese un punto de OF como centro y trácese una circunferencia tangente a la directriz. Utilícese ahora O como centro de homotecia.

4.2–21 Tómese un punto D' de BA. Luego tómese E'' sobre CA de modo que $CE'' = BD'$. Supongamos que la circunferencia $D'(B)$ corte a la paralela BC que pasa por E'' en E'. Trácese por E' una recta paralela a AC que corte a BA en A' y a BC en C'. Tenemos ahora una figura homotética de la figura deseada, con B como centro de homotecia.

4.2–22 Utilícese el problema 4.2–21.

4.2–23 Sométase C_2 a la homotecia $H(O,k)$, donde $k = OP_1/OP_2$.

4.2–25 Utilícese el problema 4.2–23.

4.2–29 Tómese un punto O en una de las circunferencias y designemos por C_1 y C_2 las otras dos. Utilícese ahora el problema general 4.2.5.

4.2–30 Sea $(OP_1)(OP_2) = a^2$. Inviértase C_2 en C'_2 en la circunferencia $O(a)$.

4.2–31 Utilícese el problema 4.2–30.

4.2–33 Inviértase con respecto al punto dado.

4.2–35 Auméntese el radio de cada circunferencia en la mitad de la distancia entre dos de ellas, obteniendo en esta forma tres circunferencias de las cuales dos son exteriormente tangentes. Inviértase con respecto al punto de contacto de estas dos circunferencias.

4.3–1 Sea A un punto arbitrario sobre m y A' el punto correspondiente sobre m'. Supongamos que PA corte a m en A''. Entonces la alineación (A'') es homográfica de la (A'). Si D es un punto doble de estas dos alineaciones homográficas coaxiales, PD es una recta pedida.

4.3–3 Unanse los vértices V y V' de los haces, y sobre VV' descríbase el arco circular que contenga al ángulo dado.* Supongamos que los rayos correspondientes de los dos haces homográficos cortan a este arco en los

* A este arco se le llama capaz. (N. del R.)

puntos P y P'. Buscamos los puntos dobles de las series de puntos homográficas concíclicas (P) y (P').

4.3–9 Sea P el punto dado y m y n las rectas dadas. Sea A un punto cualquiera de m y supongamos que PA corte a n en A' Tómense las longitudes dadas, AB y $A'B''$, sobre m y n, respectivamente, y supongamos que PB corte a n en B'. Búsquense los puntos dobles de las alineaciones homográficas coaxiales (B') y (B'').

4.3–13 Sean ABC el triángulo dado y P, Q, R los puntos dados. Sea A' un punto de BC. Híllese B' sobre CA de modo que el $\sphericalangle A'RB'$ sea igual al primero de los ángulos dados; luego, híllese C' sobre AB de modo que el $\sphericalangle B'PC'$ sea igual al segundo de los ángulos dados; después determínese A'' sobre BC de modo que el $\sphericalangle C'QA''$ sea igual al tercero de los ángulos dados. Buscamos los puntos dobles de las alineaciones homográficas coaxiales (A') y (A'').

4.3–14 Sean P, Q, R los tres puntos dados y A un punto de la circunferencia. Trácese AP hasta que corte a la circunferencia nuevamente en B; después trácese BQ hasta que corte a la circunferencia de nuevo en C; luego trácese CR hasta que corte a la circunferencia nuevamente en A'. Busquemos los puntos dobles de las series de puntos homográficas concíclicas (A) y (A'). Véanse los problemas 2.5–13 y 3.5–23.

4.3–15 Como en el problema 4.3–14, inscríbase en la circunferencia un triángulo cuyos lados pasen por los polos de las rectas dadas, y luego trácense las tangentes a las circunferencias en los vértices de este triángulo.

4.4–1 b) Utilícense aplicaciones sucesivas de la parte (a).

4.4–1 d) Caso 2. Híllese N sobre OM de modo que $ON = n(OM) > (OD)/2$. Por el caso 1, híllese N, el inverso de N en $O(D)$. Finalmente, híllese M' de modo que $OM' = n(ON')$.

4.4–1 a) Véase el problema 3.4–6 (a).

4.4–1 f) Véase el problema 3.4–6 (b).

4.4–2 Con los puntos A, B, C, D se puede, con compás euclidiano únicamente, obtener una circunferencia, k, cuyo centro no esté en AB ni en $C(D)$. Ante una inversión respecto a k, la recta AB y la circunferencia $C(D)$ se convierten en circunferencias cuyos centros se pueden determinar [por los problemas 4.4–1 (e) y (f)], y puntos de las cuales se pueden hallar [por el problema 4.4–1 (d)]. Estas circunferencias pueden trazarse, y hallarse sus intersecciones. Los inversos respecto a k de estas intersecciones son los puntos buscados, X y Y.

4.4–3 Con los puntos A, B, C, D se puede, con compás euclidiano únicamente, obtener una circunferencia, k, cuyo centro no esté en AB ni en CD. Ante la inversión respecto a k, las rectas AB y CD se transforman en circunferencias que pasan por el centro, O, de inversión. Los centros

de estas circunferencias se pueden determinar [por los problemas 4.4–1 (e) y (f)], y como pasan por O, dichas circunferencias pueden trazarse; el inverso respecto a k del otro punto de intersección de ellas es el punto buscado, X.

4.4–5 La circunferencia ABC es la inversa de la recta BC' respecto a la circunferencia $A(B)$. En consecuencia, utilícese el problema 3.4–6 (a).

4.4–7 Supongamos que se da el centro, O, de la circunferencia. Trácense $A(C)$ y $D(B)$ hasta que se corten en M. Trácese $A(OM)$ hasta que corte a la circunferencia dada en X, Y. Entonces, A, X, D, Y son los vértices de un cuadrado inscrito. La demostración es sencilla.

4.5–2 Caso 1. P no está en k. Trácense PAB, PCD que corten a k en A, B y C, D. Trácense AD, BC hasta que se corten en M. Trácense AC, BD hasta que se corten en N. Entonces, MN es la polar buscada.

Caso 2. P en k. Trácese por P una secante, m, y sean R y S dos puntos cualesquiera de m, pero que no estén en k. Hállense las polares de r y s de R y S. Entonces r y s se cortan en M, el polo de m. PM es la polar buscada.

4.5–3 a) Hállese, por el problema 4.5–2, la polar p de P, y supongamos que p corte a k en S y T. Entonces, PS y PT son las tangentes buscadas.

4.5–3 b) Hállese la polar p de P por el problema 4.5–2. O bien, inscríbase un hexágono, 123456, en k, donde $1 \equiv 2 \equiv P$, y utilícese el teorema del hexagrama místico de Pascal.

4.6–1 Considérese un cono oblicuo con base circular y vértice V. Existen secciones circulares del cono que no son paralelas a la base; sea c una de estas secciones. Una construcción con regla para hallar el centro de la base circular del cono conduciría, por la proyección desde V, a una construcción con regla para el centro de c. Pero el centro de c no es la proyección desde V del centro de la base.

4.6–3 a) Tómense M y N, dos puntos de la circunferencia interior tales que MN no sea un diámetro de la circunferencia. Por el problema 4.5–3 (b), trácense las tangentes a la circunferencia interior en M y en N. Tenemos ahora, en la circunferencia exterior, dos cuerdas bisecadas, en dos direcciones distintas. Podemos entonces (por el problema 4.5.1) construir un paralelogramo con lados paralelos a dichas cuerdas. Utilícese luego el problema 4.6–2 (b).

4.6–3 b) Sea P el punto de contacto. Trácense tres secantes cualesquiera AA', BB', CC' que pasen por P, donde A, B, C están en una circunferencia y A', B', C' en la otra. Entonces, BA es paralela a $B'A'$ y BC es paralela a $B'C'$. Utilícese ahora el problema 4.6–2 (b).

4.6–3 c) Supongamos que las dos circunferencias se corten en P y Q. Trácense dos secantes, MQT y UQS, estando M y U en una circunferencia

y T y S en la otra. Luego trácense secantes TPV, SPN donde V y N están en la primera circunferencia. Entonces MN es paralela a VU. Obténgase análogamente otro par de rectas paralelas, y utilícese el problema 4.6–2 (b).

4.6–5 a) Tómese un punto P de AB y con una regla de bordes paralelos trácese un par de rectas paralelas, PP' y MM', a una distancia igual a la anchura de la regla. MM' corta a AB en M. Trácese luego NN' paralela a PP' a una distancia igual a la anchura de la regla a partir de PP'. NN' corta a AB en N. Entonces P es el punto medio del segmento MN.

4.6–5 b) Utilícese el problema 4.5.1.

4.6–5 c) Supongamos que P está en AB. Trácese por P una recta, $P'P$, y luego trácense $M'M$ y $N'N$ paralelas a $P'P$ a una distancia igual a la anchura de la regla a partir de $P'P$. Trácese luego NN'' sin que sea paralela a $P'P$ y a una distancia igual a la anchura de la regla desde P. NN'' corta a $M'M$ en R. RP es la perpendicular pedida.

Supongamos que P no está en AB. Tómese un punto, Q, en AB y (por el caso anterior) trácese QR perpendicular a AB. Por la parte (b), trácese PT paralela a RQ. Entonces, PT es la perpendicular pedida.

4.6–5 d) Desígnese por k la anchura de la regla. Tómese un punto C' y trácese $C'D'$ paralela a CD. Tómese D' de modo que $C'D' = k$; esto puede hacerse levantando una perpendicular a $C'D'$ en C' y utilizando luego la regla para obtener D'. Trácense CC' y DD' hasta que se corten en S. Trácese $C'A'$ paralela a CA hasta que corte a SA en A'. Entonces trácese $A'B'$ paralela a AB. Hemos reducido ahora el problema a aquel en que $CD = k$. Prosigamos, entonces, con este caso especial.

Tómese un punto P de AB exterior a la circunferencia $C(D)$. Trácese PT a una distancia k de C; PT es entonces una tangente a $C(D)$. Trácese CT perpendicular a PT. Trácense CR perpendicular a AB y TR perpendicular a PC. Por R trácense RX y RY a una distancia k de C hasta que corte a AB en los puntos pedidos, X y Y. La demostración es sencilla. TR es la polar de P, en consecuencia, AB es la polar de R. Por tanto, como RX y RY son tangentes a $C(D)$, X y Y son los puntos pedidos de intersección de AB y $C(D)$.

4.6–5 e) Podemos proceder como en los problemas 4.5.5 y 4.5.6.

4.6–9 Demostración I. Sea C una circunferencia en el interior de S y tal que G'; A', R' estén en el exterior de C. Inviértanse G', A' en C, obteniendo G'', A'' en el interior de C. Hállese R'' (también en el interior de C) y luego inviértase R'' respecto a C para hallar R'.

Demostración II. Tómese el punto P en el interior de S como centro de homotecia y constrúyase, a partir de G', A', el lugar geométrico G'', A'' homotético de G, A, pero que esté completamente en el interior de S. Constrúyase ahora R'' (también en el interior de S) y luego hállese R'.

4.6–12 a) Utilícese el hecho de que la suma de la serie geométrica infinita $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \cdots$ es $\frac{1}{3}$. Para otra solución euclidiana asintótica del problema de trisección véase el problema 4134, *The American Mathematical Monthly*, diciembre de 1945.

4.6–14 a) Trácese una circunferencia Σ sobre la esfera y márquense tres puntos A, B, C sobre dicha circunferencia. En un plano constrúyase un triángulo congruente al ABC, hállese su circunferencia circunscrita y obténgase luego el radio de Σ. Constrúyase un triángulo rectángulo que tenga el radio de Σ como uno de sus catetos y la cuerda polar de Σ como hipotenusa. Es fácil hallar ahora el diámetro de la esfera dada.

4.6–14 b) Si d es el diámetro de la esfera y e el lado del cubo inscrito, entonces $e = (d\sqrt{3})/3$, de donde e es un tercio de la altura del triángulo equilátero del lado $2d$.

4.6–14 c) Si d es el diámetro de la esfera y e la arista del tetraedro regular inscrito, entonces $e = (d\sqrt{6})/3$, de donde e es la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles con su cateto igual a la arista del cubo inscrito. Véase la parte (b).

5.2–1 En su movimiento, la recta s sólo puede pasar sobre un vértice de P al mismo tiempo.

5.3–27 Sean AB y $A'B'$ un par correspondiente de arcos congruentes sobre el límite de P. Podemos unir los extremos A y B del arco AB por una línea poligonal p de modo que la región K limitada por el arco AB y la línea p no contenga sino puntos interiores de P, mientras que la región congruente, K', limitada por el arco $A'B'$ y la línea correspondiente, p', contenga sólo puntos exteriores de P. Cortemos la región K y coloquémosla sobre la K'. Haciendo esto para todos los pares correspondientes de arcos congruentes sobre el límite de P se convierte a P por disección en un polígono. Puede tratarse Q semejantemente. Podemos aplicar entonces los teoremas 5.3.6 y 5.1.3.

5.4–4 Dicha disección se indica en la demostración del teorema 5.4.12.

5.4–5 Véase la demostración del teorema 5.4.12.

5.4–8 Consúltese un texto de geometría del espacio a nivel intermedio.

5.4–9 Consúltese un texto de geometría del espacio a nivel intermedio.

5.4–10 Consúltese un texto de geometría del espacio a nivel intermedio.

5.4–11 a), b), c) Consúltese un texto de geometría del espacio a nivel intermedio.

5.5–1 Como (fig. 5.5a) los triángulos rectángulos DJE y GKF son congruentes, tenemos $DJ = GK$ y $JE = KF$. Esto es suficiente para garantizar que la figura que se vuelva a formar sea un rectángulo R. Pero R

tiene que ser un cuadrado, ya que un lado es la raíz cuadrada del área de R.

5.5–2 En la figura 5.5a, márquense E' y F' en los puntos medios de $A'B'$ y $D'C'$. Tómese $E'G' = 3^{-1/4}(A'B')$. Tómese $F'H' = H'K' = E'G'$.

5.5–3 Trácese el octágono regular y un cuadrado equivalente (figura 5.5c). Con radio igual al apotema del octágono, trácese una circunferencia concéntrica con el cuadrado, y márquense las intersecciones alternadas de la circunferencia y el cuadrado con los puntos de corte A, B, C y D. El conjunto correspondiente de puntos en el octágono será el conjunto de los puntos medios, A', B', C' y D', de los lados alternados. Gírese ahora la frontera $A'B'$ de modo que A' y B' caigan sobre B y A. Etc. Los lados del octágono se convierten en rectas de corte de las piezas del cuadrado, y los lados del cuadrado son las rectas de corte de las piezas del octágono.

5.5–6 Diséquese el cuadrado más pequeño del rectángulo en cuadrados como se muestra en la figura 5.5e. Repítase el procedimiento.

5.5–7 Principíese con los cuadrados sucesivos de lados 36, 25, 16, 28, 33 alrededor del perímetro del rectángulo.

5.5–8 Un par de cuadrados de las esquinas diagonalmente opuestas son del mismo color, digamos rojo. Se deduce que en la pieza restante hay más cuadrados negros que rojos. Pero un dominó requiere un cuadrado de cada color.

5.5–9 Véase, por ejemplo, págs. 199-207 de Maurice Kraitchik, *Mathematical Recreations.*

5.5–11 Empléese la inducción matemática. Véase el problema E 468, *The American Mathematical Monthly,* febrero de 1942.

5.5–14 a) Véase el problema E 1406, *The American Mathematical Monthly,* noviembre de 1960.

5.5–14 b) Véase V. E. Hoggatt, Jr. y Russ Denman, "Disección en isósceles acutángulos de un triángulo obtusángulo", *The American Mathematical Monthly,* noviembre de 1961, págs. 912-913.

5.6–2 Si los puntos coinciden, entonces $i - j = 2k\pi$ para algún entero k. Pero, como π es irracional, esto es imposible.

5.6–6 a) De hecho, $R(O,\theta)$ convierte a z en $z(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = ze^{i\theta}$.

5.6–6 b) Utilícese la parte (a) y la inducción matemática.

5.6–6 c) Si $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, entonces existen polinomios P y Q en e^i, con coeficientes enteros, tales que $Pe^i = Q + 1$.

5.6–6 d) Suponiendo lo contrario tenemos, por la parte (c), que e^i satisface una ecuación polinómica con coeficientes enteros. Pero esto es imposible, ya que e^i es trascendente.

5.6–7 Sí, por la paradoja de Banach-Tarski.

6.1–3 a) Desígnese el centro pedido de perspectividad por V. Entonces [por el problema 6.1–2 (a)] $\sphericalangle AVC = \sphericalangle A'B'C' = \alpha$ y $\sphericalangle DVF = \sphericalangle D'E'F' = \beta$. Para hallar V trácese sobre AC un arco de una circunferencia que contenga al ángulo α y sobre DF (al mismo lado de l) un arco de circunferencia que contenga al β. Como A, C, D, F están en el orden A, D, C, F, estos arcos deben cortarse; sea X dicha intersección. Gírese ahora X alrededor de la recta $ADCF$ fuera del plano π hasta una posición V. Entonces, si proyectamos el plano π desde el centro V sobre un plano paralelo al plano de V y l el problema queda resuelto.

6.1–3 b) No necesariamente, sólo cuando los arcos circulares descritos en la solución de la parte (a) se corten.

6.1–4 Supongamos que AB y CD se corten en U, AD y BC en V, AC y BD en W. Por el problema 6.1–3, proyéctese la recta UV al infinito y los ángulos VAU y LWM en ángulos rectos.

6.1–5 Trácese una recta que corte a los rayos del haz $U(AB,CD)$ en (ab,cd). Sea $U'(A'B',C'D')$ la proyección, ante una perspectividad, del haz $U(AB,CD)$, y sea $(a'b',c'd')$ la proyección de (ab,cd). Entonces $U(AB,CD) = (ab,cd) = (a'b',c'd') = U'(A'B',C'D')$.

6.1–6 Sean V el centro de perspectividad y X y Y' los pies de las perpendiculares desde V sobre π y π'. Entonces, las bisectrices del $\sphericalangle XVY'$ cortan a π y π' en los isocentros de perspectividad. Supongamos, por ejemplo, que la bisectriz interna del $\sphericalangle XVY'$ corte a π y π' en E y E'. Entonces XE y $E'Y'$ se cortarán en el eje de perspectividad en un punto K, y $EK = E'K$. Sean los lados de un ángulo en E tales que corten el eje de perspectividad en L y M. Entonces el $\sphericalangle LEM$ se mapea en el $\sphericalangle LE'M$. Pero los triángulos LEM y $LE'M$ son congruentes. Etc.

6.1–7 Las isorrectas son las reflexiones del eje de perspectividad en las rectas de fuga de los dos planos.

6.1–8 Proyéctese $ABB'A$ en un cuadrado (por el problema 6.1–4).

6.1–9 b) La recta en el infinito.

6.1–9 c) En sí misma; de hecho todo punto de la recta b se mapea en sí mismo.

6.1–9 d) Una recta paralela a las a y b.

6.1–9 e) En sí misma.

6.1–9 f) Una recta paralela a las a y b.

6.1–9 g) Sea m una recta no paralela a las a y b. Entonces m corta a a y a b en los puntos U y V. m' es la recta que pasa por V y es paralela a OU.

6.1–9 h) En O.

6.1–9 i) Sea c una recta que pasa por la intersección de las a y b. OA corta a c en Q y QB corta a PO en P'. El mapeo de La Hire puede obtenerse de esta generalización proyectando la recta c al infinito.

6.1–11 La expresión es una h-expresión.

6.2–1 Véase el teorema 2.5.4.

6.2–3 Sean AB y CT tales que se corten en R. Entonces, la polar de R pasará por C y por el conjugado armónico de R respecto a AB; y, en consecuencia, es CD. Como R está en AB, se deduce que CD pasa por el polo de AB.

6.2–5 Si R es el polo de PQ, entonces la polar de U es la recta que pasa por R paralela a AB.

6.2–7 R, S, T están en la polar del punto de intersección de BC y AD.

6.2–9 a), b), c) La recta del infinito es tangente, corta y no corta a una parábola, una hipérbola y una elipse, respectivamente.

6.2–9 e) Porque la polar del centro del paralelogramo es la recta del infinito.

6.2–9 f) Sea W el otro punto de intersección de CT con la cónica. Entonces, $(UW,TV) = -1$.

6.2–11 b) Las diagonales del cuadrilátero formado por los puntos de contacto son diámetros (ya que sus polos están en el infinito) y, en consecuencia, se bisecan; el cuadrilátero es, por tanto, un paralelogramo. Se deduce que los polos de las diagonales del paralelogramo circunscrito están en el infinito, y estas diagonales son, por consiguiente, los diámetros.

6.2–11 c) Supongamos que P y Q son dos puntos de la cónica y que V sea el punto medio de PQ. Si C es el centro de la cónica, CV es el diámetro que biseca las cuerdas paralelas a PQ. Por tanto, CV y PQ son paralelas a un par de diámetros conjugados y, en consecuencia, son perpendiculares entre sí. Como $PV = VQ$, se deduce que $CP = CQ$, y todos los radios de la cónica son iguales.

6.2–13 a), b) Véase el problema 4.5–3.

6.2–15 a) Aplíquese el teorema de Brianchon al hexágono $AFBCDE$.

6.2–15 b) Sean el cuadrilátero $ABCD$ y E y F los puntos de contacto de los lados AB y DC. Aplíquese el teorema de Brianchon al hexágono $AEBCFD$.

6.2–15 c) Consideremos que el triángulo es ABC y sean D, E y F los puntos de contacto de los lados BC, CA y AB. Aplíquese el teorema de Brianchon al hexágono $AECDBF$.

6.2–17 Aplíquese el teorema de Carnot al triángulo ABC; o bien, proyéctese en una circunferencia y empléense las relaciones anarmónicas (BC,A_1A_2) y (AC,B_1B_2).

6.2–19 Sean AD, BE, CF tales que se corten en G. Proyéctese (véase el teorema 6.1.7) la figura de modo que G se convierta en el centroide de

ABC. Entonces, D, E y F son los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente, y $A'D$, $B'E$ y $C'F$ son diámetros de la cónica.

6.3–3 Desígnense los lados del hexágono por 1, 2, 3, 4, 5, 6, y sea p la recta que une los puntos 61 y 34, q la que une los puntos 12 y 45, r la que une los puntos 23 y 56. Por el teorema 6.3.14 hay una sola cónica, c, propia tangente a 1, 2, 3, 4, 5. Sea $6'$ la otra tangente a c desde el punto $5r$. Entonces, por el teorema de Brianchon aplicado al hexágono $123456'$, el punto $6'1$ debe estar en p. Se deduce que $6 \equiv 6'$.

6.3–5 Sea ABC el triángulo. Supongamos que la paralela a BC que pase por un punto G corte a AB en C_2 y a AC en B_1; que la paralela a CA que pase por G corte a BC en A_2 y a BA en C_1; sean las rectas paralelas a AB que pasan por G tales que corten a CA en B_2 y a CB en A_1. Considérese la h-expresión.

$$(\overline{AC}_1)(\overline{AC}_2)(\overline{BA}_1)(\overline{BA}_2)(\overline{CB}_1)(\overline{CB}_2)/$$
$$(\overline{AB}_1)(\overline{AB}_2)(\overline{BC}_1)(\overline{BC}_2)(\overline{CA}_1)(\overline{CA}_2).$$

Ahora (por el teorema 6.1.7) proyéctese ABC y el punto G en un triángulo y en su centroide. En esta figura proyectada la h-expresión tiene el valor 1. Aplíquese ahora el problema 6.3–4.

6.3–9 Véase el problema 2.5–8.

6.3–10 Véase el problema 2.5–8.

6.3–11 Para $O(T) = (P) = S(P)$.

6.3–13 Sean S y S' los puntos de contacto con c y c' de una tangente común a c y c'. Entonces $S(P) = (R) = S'(P)$. Pero $S(S')$ corresponde a $S'(S)$.

6.3–15 Para $U(JK,LM) = U(AB,CD) = V(AB,CD) = V(JK,LM)$.

6.3–17 Supongamos que $A'C'$ corte a BA y BC en D y E, y que AC corte a $B'A'$ y $B'C'$ en D' y E'. Entonces $(A'C',DE) = B(A'C',AC) = B'(A'C',AC) = (D'E',AC)$. Por tanto, $A'D'$, $C'E'$, DA, EC son tangentes a una cónica tangente a $A'C'$ y AC.

6.3–18 Sean los triángulos ABC y $A'B'C'$, donde A es el polo de $B'C'$, etcétera. Supongamos que BC y $B'C'$ se corten en M y que AA' corte a BC en N y a $B'C'$ en N'. Entonces (véase el teorema 6.2.13), $(BC,NM) = A'(C'B',MN) = (B'C',N'M)$. Puesto que M es autocorrespondiente, se deduce que BB', CC', NN' (o bien, AA') son concurrentes.

6.3–19 Sean AA', BB' y CC' las diagonales de un cuadrilátero completo y supongamos que A y A' son conjugados, y que B y B' también son conjugados. Sea $A''B''C''$ la polar de ABC. Ahora bien, $B''C''$ (que es la polar de A) pasa por A', y $A''C''$ (que es la de B) pasa por B'. Pero los triángulos ABC y $A''B''C''$ son copolares (por el problema 6.3–18), de donde sus lados correspondientes se cortan en tres puntos colineales, dos de los

cuales son evidentemente A' y B'. Se deduce que C' debe ser el tercer punto de intersección. Esto es, $B''A''$ pasa por C', de donde C y C' son puntos conjugados.

6.4–9 Sea P el polo de p respecto a una cónica propia c, cuya recíproca es la cónica propia c'. Desde un punto arbitrario, Q, de p, exterior a c, trácense las dos tangentes t y u a c. Desígnese PQ por q. Entonces, $(pq,tu) = -1$. Ahora bien, si P', Q', T', U', q', p' son los recíprocos de p, q, t, u, Q, P, se deduce que P', Q', T', U' están en q' y $(P'Q',T'U') = -1$. Pero T', U' son puntos de c'. En consecuencia, Q' está en la polar de P' respecto a c'. Pero Q' está en p'. Por tanto, p' y la polar de P' con respecto a c' coinciden ambas con el lugar geométrico de Q' y, por consiguiente, son idénticos. Se deduce que p' es la polar de P' respecto a la cónica c'.

6.4–10 Utilícese el problema 6.4–9.

6.4–11 Un hexágono se inscribe en una cónica si y sólo si los puntos de intersección de los tres pares de lados opuestos son colineales.

6.4–13 a) Sea c la cónica propia que pasa por A, B, C, D y E. Por el teorema de Pascal hállese A', en que PA corta a c nuevamente. Análogamente hállese B', donde PB corta a c de nuevo. Supongamos que AB' y $A'B$ se corten en U y que AB y $A'B'$ se corten en V. Entonces, UV es la polar buscada.

6.4–13 b) Dualícese la construcción de la parte (a).

6.4–15 a) Supongamos que A se desplaza sobre la recta l y L es el polo de l respecto a la primera cónica. Entonces, a pasa por L. Sea l' la polar de L respecto a la segunda cónica. Entonces, A' está en l'.

6.6–1 Utilícese el teorema 6.6.2.

6.6–3 $(3ab\sqrt{3})/4$.

6.6–4 $(4\pi K\sqrt{3})/9$.

6.6–5 Cada uno de los diámetros perpendiculares de una circunferencia biseca todas las cuerdas paralelas al otro.

6.6–7 Utilícese el problema 6.6-5.

6.6–13 Proyéctese ortogonalmente la elipse en una circunferencia, de centro O', digamos. Entonces, la circunferencia sobre $O'T'$ como diámetro pasa por P', Q', V', de donde $\sphericalangle T'V'Q' = \sphericalangle T'P'Q'$. Etc.

6.6–16 $ab(\sqrt{3} - \pi/2)$.

6.6–17 Las rectas trazadas desde un punto de una elipse paralelas a los diámetros de dicha elipse que bisecan los lados de un triángulo inscrito cortan a los lados respectivos de dicho triángulo en tres puntos colineales.

6.6–19 Una cuerda, AQ, de una elipse corta al diámetro de la elipse conjugado del diámetro que pasa por A en el punto R; CP es el radio de la elipse paralelo a AQ. Entonces, $(AQ)(AR) = 2(CP)^2$.

6.6–20 Considérense primero los triángulos cuyas bases están en la recta de intersección de los dos planos.

7.1–1 Para deducir el quinto postulado de Euclides, cortemos AB y CD por la transversal ST, y supóngase que $\sphericalangle BST + \sphericalangle DTS < 180°$. Por S trácese QSR, formando $\sphericalangle RST + \sphericalangle DTS = 180°$. Ahora aplíquese, a su vez, I 28, el postulado de Playfair e I 17.

7.1–3 Consúltese Wolfe, *Introduction to Non-Euclidean Geometry*, págs. 21-23.

7.1–4 Hágase el mismo experimento y razonamiento sobre un triángulo esférico, utilizando un arco de círculo máximo en lugar de una regla.

7.1–10 Consúltese un texto de geometría del espacio de nivel intermedio.

7.1–13 b) Sea ABC un triángulo cuya suma de sus ángulos es igual a dos rectos. Si ABC no es todavía rectángulo isósceles, trácese la altura BD. Si ninguno de los triangulos resultantes es rectángulo isósceles, márquese sobre el cateto mayor de uno de ellos un segmento igual al cateto menor. Por la parte (a), el triángulo rectángulo isósceles resultante tiene la suma de sus ángulos igual a dos rectos. Juntando dos de tales triángulos rectángulos isósceles congruentes, se puede formar un cuadrilátero que tenga todos sus lados iguales y todos sus ángulos rectos. Agrupando cuatro cuadriláteros congruentes de este tipo, se puede formar un cuadrilátero mayor de la misma clase. Repitiendo la última construcción un número suficiente de veces, se puede obtener un cuadrilátero del mismo tipo que tenga sus lados de longitud mayor que un segmento dado. Una diagonal de este último cuadrilátero dará un triángulo rectángulo isósceles del tipo deseado.

7.1–13 c) Sea ABC un triángulo rectángulo, cuyo ángulo recto está en C. Por la parte (b), existe un triángulo rectángulo isósceles, DEF, con su ángulo recto en E, cuya suma de sus ángulos es igual a dos rectos y sus catetos son mayores que cualquiera de los del triángulo ABC. Ahora prolónguese CA y CB hasta A' y B', respectivamente, de modo que $CA' = CB' = ED$. Entonces los triángulos DEF y $A'CB'$ son congruentes. Trácese $A'B$, y aplíquese la parte (a) al triángulo $A'CB'$. La extensión a *cualquier* triángulo ABC se logra ahora fácilmente dividiendo ABC en dos triángulos rectángulos por una de sus alturas.

7.1–14 Véase Wolfe, *Introduction to Non-Euclidean Geometry*, páginas 23-24.

7.1–15 Véase Wolfe, *Introduction to Non-Euclidean Geometry*, pág. 25.

7.2–1 Trácese PQ perpendicular a AB y utilícese el teorema 7.2.4.

7.2–3 Utilícese el teorema 7.2.11.

7.2–5 Trácese $A'E'$ paralela a $B'D'$ y utilícese el teorema 7.2.12.

7.2–7 Utilícese el teorema 7.2.12.

7.2–9 a) $h = \log \operatorname{ctg}[\Pi(h)/2]$.

7.3–3 Si $AD > BC$, tómese $AE = BC$ sobre AD. Entonces, $\sphericalangle BCD > \sphericalangle BCE = \sphericalangle AEC > \sphericalangle ADC$. Etc.

7.3–5 Trazando la recta que une los puntos medios de la cima y la base, y aplicando el problema 7.3–3, vemos que la cima es mayor que la base.

7.3–7 Sea $ABCD$ el cuadrilátero de Saccheri dado, con base AB. Sean E y F los puntos medios de AD y BC y sean G y H los puntos medios de AB y DC. Entonces, $ABFE$ es un cuadrilátero de Saccheri. Por consiguiente, GH, que es perpendicular a AB en G, tiene que ser perpendicular a EF. La segunda parte del problema se deduce ahora del teorema 7.3.14.

7.3–9 En caso contrario, la suma de los ángulos del triángulo sería igual o excedería a 180°.

7.4–12 Por el teorema del hexagrama místico de Pascal.

7.4–13 Esto es una consecuencia sencilla del teorema del hexagrama místico de Pascal.

7.5–3 **a)** Aplíquese la transformación S al segmento AB, tomando O como centro y el $\sphericalangle \overline{BOC}$ como ángulo. Entonces B se mapeará a C y A a D', donde $\sphericalangle \overline{AOD'} = \sphericalangle \overline{BOC}$ y AD' es perpendicular a OD'. Por tanto, el segmento AB se mapea al segmento $D'C$, y el segmento OA al OD'. Pero el ángulo recto OAB, un lado del cual pasa por el centro O, deberá mapearse en un ángulo recto, un lado del cual pasa por O. Se deduce que $\sphericalangle OD'C = 90°$. Etc.

7.5–3 **b)** $OABC$ es concíclico y $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OBC$.

7.5–4 **a)** Sean ABC y DEF ángulos planos de un ángulo diedro y sea O el punto medio de BE. Constrúyase el $\sphericalangle A'EC'$, la imagen del $\sphericalangle ABC$ en la reflexión $R(O)$. Luego $\sphericalangle A'EC = \sphericalangle ABC$. Ahora bien, $\sphericalangle A'EO$ es la imagen de $\sphericalangle ABO$ en $R(O)$; por consiguiente, $A'E$ es perpendicular a EO. Se deduce que A', E, D son colineales. Análogamente, C', E, F son colineales, y $\sphericalangle A'EC' = \sphericalangle DEF$.

8.1–3 La verificación de los cuatro primeros postulados presenta poca dificultad. Para verificar el quinto postulado es suficiente demostrar que ordinariamente dos rectas que se cortan, cada una determinada por un par de puntos restringidos, se cortan en un punto restringido. Esto puede lograrse demostrando que la ecuación de una recta determinada por dos puntos que tengan coordenadas racionales tiene coeficientes racionales, y que dos rectas de éstas, si se cortan, han de cortarse en un punto que tenga coordenadas

racionales. Para la última parte del problema, considérese la circunferencia unidad con centro en el origen, y la recta que pase por el origen cuya pendiente sea uno.

8.1–5 a) Supongamos que la recta entra al triángulo por el vértice A. Tómese un punto cualquiera U de la recta y que esté en el interior del triángulo. Sea V un punto del segmento AC, y trácese la recta VU. Por el postulado de Pasch, VU (1) cortará a AB, o (2) cortará a BC, o (3) pasará por B. Si VU corta a AB, desígnese el punto de intersección por W y trácese WC; aplíquese ahora el postulado de Pasch, sucesivamente, a los triángulos VWC y BWC. Si VU corta a BC, represéntese el punto de intersección por R; ahora aplíquese el postulado de Pasch al triángulo VRC. Si VU pasa por B, aplíquese el postulado de Pasch al triángulo VBC.

8.2–5 a) —2 Sean los tres puntos A, B, C y sea T un movimiento que mapee a A en A', a B en B' y a C en C'. Represéntese el inverso de T por T^{-1}. Sea R un movimiento efectivo que deje a A y a B fijos. Ahora considérese la resultante de los tres movimientos T^{-1}, R, T, hechos en este orden.

8.2–5 b) —1 Sea la esfera con centro en A tal que pase por B, y sea P un punto de la esfera. Sea T el movimiento que mapea a A en A', B en B', P en P'. Represéntese el inverso de T por T^{-1}. Sea S un movimiento que deje a A fijo, pero que mapee a B en P. Ahora considérese la resultante de los tres movimientos T^{-1}, R, T, hechos en este orden.

8.2–5 c) Pieri dice que AC es *perpendicular* a AB si existe un movimiento que deje a A y a B fijos pero mapee a C en otro punto de la recta CA.

8.2–7 d) Para demostrar la congruencia de los lados restantes, empléese la *reducción al absurdo*.

8.2–9 a) Sea h un ángulo de cuerno para el que $\theta = 0$, y sea h' cualquier ángulo de cuerno en el que $\theta > 0$. Entonces, para todo entero positivo n, tenemos $nh < h'$.

8.2–9 d) Si $a = a'$ y $k = k'$, hágase $M = M'$; si $a > a'$, hágase $M > M'$; si $a = a'$ pero $k > k'$, hágase $M > M'$. Defínase $M' = nM$ si y sólo si $a' = na$, $k' = nk$.

8.2–9 f) Véase la parte (e).

8.2–10 Huntington hace las siguientes definiciones: una esfera que no incluye ninguna otra esfera se llama *punto*. Si A y B son dos puntos, el *segmento* $[AB]$ es la clase de todos los puntos X tales que toda esfera que incluya a A y a B también incluye a X. La *extensión* de $[AB]$ *más allá* de A es la clase de todos los puntos X tales que $[BX]$ contenga a A; análogamente, la *extensión* de $[AB]$ *más allá* de B, es la clase de todos los puntos X tales que $[AX]$ contenga a B. El *rayo* AB es la clase de todos los puntos

que pertenecen a $[AB]$ o a la extensión de $[AB]$ más allá de B. La *recta* AB es la clase de todos los puntos que pertenecen a $[AB]$ o a una de sus extensiones.

8.3–4 Interprétense las abejas como seis personas, A, B, C, D, E, F, y las cuatro colmenas como los cuatro comités (A,B,C), (A,D,E), (B,F,E) y (C,F,D). O bien, interprétense las abejas y las colmenas como seis árboles y cuatro hileras de árboles, respectivamente, formando los vértices y los lados de un cuadrilátero completo.

8.3–5 b) Para demostrar la independencia de P2, interprétense las abejas y las colmenas como cuatro árboles y cuatro hileras de árboles formando los vértices y los lados de un cuadrado. Para demostrar la independencia de P3, interprétense las abejas como cuatro árboles situados en los vértices y en el pie de una altura del triángulo equilátero y las colmenas como las cuatro hileras de árboles sobre los lados y la altura del triángulo. Para demostrar la independencia de P4, interprétense las abejas y las colmenas como tres árboles y tres hileras de árboles formando los vértices y los lados de un triángulo.

8.3–6 Véase Eves y Newsom, *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics,* Sec. 6.2.

8.3–10 Interprétense los elementos de S como un conjunto de coordenadas cartesianas rectangulares de referencia que son paralelas entre sí, y supongamos que $b\ F\ a$ significa que el origen del sistema b está en el primer cuadrante del sistema a. O bien, interprétense los elementos de S como el conjunto de todos los pares ordenados de números reales (xy) y supongamos que $(m,n)\ F\ (u,v)$ significa que $m > u$ y $n > v$.

8.7–6 a) Considérese, por ejemplo, el triángulo ABJ. Las alturas desde A, B y J son las rectas $ASGYM$, $RKIBY$, $EJOTY$, que concurren en Y. Los puntos medios de los lados AB, BJ y AJ son D, P y R, respectivamente. Las tres mediatrices de los lados son $DINSX$, $IVOCP$, $RKIBY$, que concurren en I. Las tres medianas son $WKDQJ$, $AFKPU$, $RKIBY$, que concurren en K. Obsérvese que K divide la mediana AP en la razón $2:1$, porque AF es congruente a FK y KP, y K divide la mediana BR en la razón de $2:1$, porque BI es congruente a IK y KR. Obsérvese también que los puntos Y, I, K son colineales, en la recta $RKIBY$, y que K divide a YI en la razón $2:1$.

INDICE ALFABETICO

A

B

C

H

I